

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МЕХАНИКИ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ

**Следникова Татьяна Олеговна**

**Магистерская диссертация**

**Моделирование оптимального орбитального  
движения в окрестности коллинеарной точки  
либрации**

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа «Математическое моделирование в задачах  
естествознания»

Научный руководитель,  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор  
Шмыров А.С.

Санкт-Петербург

2017

# Содержание

Введение.....	4
Постановка задачи .....	7
Обзор литературы .....	8
Глава 1. Орбитальное движение в окрестности точки либрации .....	11
1.1    Уравнения движения круговой ограниченной задачи трех тел и его модификация .....	11
1.2    Траектория движения небесного объекта в окрестности точки либрации .....	14
1.2.1.    Случай 1 .....	15
1.2.2.    Случай 2 .....	17
Глава 2. Стабилизация движения в окрестности точки либрации.....	20
2.1    Управляемое орбитальное движение.....	20
2.2    Траектория управляемого движения небесного объекта в окрестности точки либрации .....	22
2.2.1    Случай 1 .....	23
2.2.2    Случай 2 .....	26
Глава 3. Оптимизация стабилизирующего управления .....	31
3.1    Критерий оценки стабилизирующего управления. ....	31
3.2    Математическая постановка задачи оптимизации .....	32
3.3    Поиск линейного регулятора для КА при фиксированных начальных данных.....	33
3.4    Численное моделирование.....	34
3.4.1    Случай 1.....	34

3.4.2 Случай 2. ....	36
3.5 Построение оптимального коэффициента $k$ для случаев $x_1(0) = 0.9$ и $x_1(0) = 1.1$ .....	39
3.5.1 Случай 3. ....	40
3.5.2 Случай 4. ....	42
Выводы.....	45
Заключение .....	46
Список литературы .....	48
Приложение .....	50

## Введение

Космическое пространство всегда представляло огромный интерес для человечества. В настоящее время развитие науки и техники позволяет совершать космические полеты, что значительно расширило возможности изучения космического пространства. Особенную важность представляет собой околоземное космическое пространство. Космические аппараты и станции на околоземной орбите позволяют проводить научные исследования и открытия. Кроме того, научная деятельность во многом направлена на изучение и использование этого пространства для решения вопросов безопасности планеты Земля: со стороны космоса, например, для защиты от астероидной опасности, так и в атмосфере планеты – озоновые дыры и парниковый эффект. Поэтому важным и актуальным вопросом является возможность управления космическими аппаратами в околоземном пространстве.

Достаточно адекватно описывают движение космического аппарата в околоземном пространстве на расстоянии порядка нескольких сот тысяч километров от центра земли уравнения круговой ограниченной задачи трех тел. Частными решениями этой задачи являются точки либрации – положения космического аппарата, в которых он неподвижен относительно Земли и Солнца (для системы Земля-Солнце). Ближайшее такое положение к Земле – это коллинеарная точки либрации  $L_1$ , которая располагается на прямой Земля-Солнце на расстоянии около 1,469 млн км от Земли. Так как это частное решение неустойчиво, космический аппарат, попадая в окрестность точки либрации, не может продолжительно пребывать в этом положении и под воздействием гравитационных сил притяжения покидает эту область. И хотя неустойчивость в этой области также может быть использована во благо, в данной работе рассматривается возможность оказывать воздействие на космический аппарат, таким образом обеспечивая его пребывание в неустойчивой области некоторое время. К настоящему

времени гравитирующие свойства точки либрации  $L_1$  уже используются научными проектами, например, SOHO – обсерватория для слежения за солнечной активностью, и другими.

В данной работе рассматривается движение космического аппарата в околоземном пространстве в рамках круговой ограниченной задачи трех тел, без управляющего воздействия и при его применении. Управляющее воздействие представлено в виде линейного регулятора. Поставлена задача о поиске оптимального управления движением КА, с точки зрения минимизации модуля управляющего воздействия, вводится в рассмотрение критерий оптимальности и проводится численный эксперимент. В ходе проводимого исследования были найдены не только оптимальные управляющие воздействия для различных начальных данных космического аппарата, но и замечена интересная закономерность: начальное положение КА (как и вся траектория движения) находится на границе области управляемости, что, вообще говоря, не предполагалось изначально и может способствовать продолжению изучения этой зависимости аналитическим путем.

Данная работа состоит из трех глав:

Глава 1 освещает теоретические исследования в постановке круговой ограниченной задачи трех тел, представление системы уравнений, описывающих движение КА, единицы измерения заданной системы. Также в ней вводится в рассмотрение некоторая окрестность точки либрации, и рассматривается траектория неуправляемого движения КА, помещенного в нее.

В Главе 2 показано одно из возможных представлений управляющего воздействия на траекторию движения КА, помещенного в окрестность точки либрации, рассмотрена система уравнений управляемого орбитального движения, построены траектории управляемого орбитального движения для КА, помещенного в ранее указанную окрестность точки либрации  $L_1$ .

Глава 3 посвящена построению оптимального управления, введен

критерий оптимальности, проведен численный эксперимент в поиске оптимального управления для введенной ранее окрестности точки либрации. Получены результаты и сделано предположение о зависимости выбираемой характеристики. Вводится в рассмотрение новая окрестность точки либрации и проводится эксперимент для нее. Согласно полученным оптимальным управлениям для всех рассмотренных случаев окрестности точки либрации предположение подтверждается, что освещено в выводах и заключении к работе.

## Постановка задачи

Возможность использования свойств точек либрации является привлекательной с практической точки зрения. Однако даже при наличии высокотехнологичного оборудования ресурсы не безграничны, и возникает вопрос, как добиться желаемого результата, затрачивая как можно меньше энергии, финансов, и т.д. В случае, рассмотренном в данной работе, необходимо выяснить, как можно удерживать космический аппарат, помещенный в окрестность коллинеарной точки либрации  $L_1$ , оказывая при этом возможное наименьшее воздействие на него.

Одним интересным устройством для обеспечения малых воздействий на космический аппарат может выступать солнечный парус. Это устройство отражает солнечное давление, которое может быть использовано и в небольшом управляющем воздействии на аппарат. Конечно, необходимо отметить, что речь идет о сравнительно малом ускорении по сравнению, например, с реактивным. Однако ресурсная трата значительно меньше в случае его применения.

Таким образом, в данной магистерской диссертации решается задача о нахождении минимального управляющего воздействия на заданной траектории движения космического аппарата в окрестности точки либрации, при котором возможна его стабилизация, т.е. моделирование оптимального орбитального движения в окрестности точки либрации  $L_1$ .

## Обзор литературы

На данный момент в научной литературе неоднократно затрагивается вопрос о точках либрации (или точках Лагранжа), их особенностях и свойствах. В первую очередь, необходимо отметить, что точки либрации являются частными решениями классической задачи трех тел. Данная задача состоит в исследовании движения трех тел, обладающих собственной массой, взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения Ньютона. Хорошо известно, что в общем виде задача трех тел не интегрируема в аналитическом виде [1] и даже в алгебраических функциях [2, 3]. Поэтому очень важным является вопрос нахождения частных решений этой задачи. Этим вопросом занимались Л. Эйлер, Ж. Лагранж, А. Пуанкаре. Большая часть фундаментального труда А. Пуанкаре «Новые методы небесной механики» посвящена построению периодических решений задачи трех тел. Работая над этой задачей, А. Пуанкаре разработал и обосновал метод малого параметра, широко применяемый в настоящее время в различных задачах. Также были разработаны различного рода способы компьютерного поиска частных решений [4].

Так в 1767 году Л. Эйлер в своей работе [5] рассмотрел три частных решения задачи трех тел, для которых во время движения тела расположены на одной прямой. А в 1772 году Ж. Лагранж показал [6] существование еще двух частных решений, при которых тела расположены в вершинах равностороннего треугольника. В середине 1970-х годов было открыто семейство орбит Бруке-Хено-Хаджидеметриу, в 1993 К. Миру нашел решение задачи трех тел, когда тела двигаются по одной траектории-восьмерке, используя вариационный метод. А в 2013 году сербские ученые [4] с помощью различных компьютерных экспериментов представили еще 13 частных решений данной задачи для наборов с определенными начальными условиями: тела имеют одинаковую массу, заданные начальную скорость и положение, и траектория их движения на плоскости циклична.



В данной работе будет рассматриваться одна из важнейших в интересах практического применения разновидностей задачи – ограниченная задача трех тел, где предполагается, что масса одного из тел незначительна и не оказывает влияние на движение двух массивных тел системы. В работе [7] можно ознакомиться и с другими разновидностями исходной задачи. Помимо классической задачи трех тел, лагранжевые и эйлеровые решения существуют и в ограниченной задаче трех тел. Если массивные тела движутся по круговым орбитам вокруг центра масс, то ограниченная задача трех тел называется круговой ограниченной задачей трех тел.

Особое внимание уделяется исследованию устойчивости точек либрации. Актуальность данных исследований уже упоминалась во введении к данной работе. Так например, если рассматривать круговую задачу трех тел в первом линейном приближении [8], то коллинеарные точки либрации неустойчивы, так как один из корней характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть. Отсюда следует их неустойчивость и в нелинейном представлении. Поэтому если малое небесное тело находится в малой окрестности точки либрации, то для его длительного пребывания необходимо оказывать управляющее воздействие. Что касается треугольных точек, то в вышеуказанном представлении они устойчивы, за исключением нескольких особых значений отношения масс основных притягивающих тел. Вопрос об устойчивости треугольных точек либрации оказался достаточно трудоемким, полное решение достигнуто в плоской круговой задаче [9]. Также в работе Маркеева А.П. рассматриваются продвижения в решении данного вопроса в плоской эллиптической, пространственной круговой и пространственной эллиптической задаче.

Для ограниченной задачи трех тел в данной работе исследуется движение в окрестности одной из коллинеарных точек либрации  $L_1$ , которая расположена на прямой Земля-Солнце. Для исследования его поведения использованы материалы статьи [10], в которой приведены уравнения движения космического аппарата в геоцентрических координатах в рамках

ограниченной задачи трех тел во вращающейся системе координат. А также представлено синтезирующее семейство стабилизирующих управлений (в силу неустойчивости исследуемой точки), и приведены несколько теорем об их существовании. Помимо нее, были рассмотрены материалы одноименной к данной работе статьи [11], в которой вводится в рассмотрения функционал для оценки расхода энергии, который будет рассмотрен далее здесь.

Стоит отметить и статью [12], в которой освещены методы использования управляющих воздействий на траекторию космического аппарата в окрестности неустойчивой точки, упоминается воздействие самих точек либрации на характер движения в ее окрестности, и говорится о возможности их применения для управления некоторым малым небесным телом.

# Глава 1. Орбитальное движение в окрестности точки либрации

## 1.1 Уравнения движения круговой ограниченной задачи трех тел и его модификация

Уравнения орбитального движения КА в рамках круговой ограниченной задачи трех тел в относительных координатах (земля в начале координат) имеют вид [13]:

$$\ddot{x} = -\frac{\gamma m_1 x}{\|x\|^3} + \gamma m_2 \left( \frac{Rl(t) - x}{\|Rl(t) - x\|^3} - \frac{l(t)}{R^2} \right), \quad (1.1)$$

где  $m_1, m_2$  – массы Земли и Солнца соответственно,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  – геоцентрические координаты положения тела,  $\gamma$  – гравитационная постоянная,  $R$  – расстояние от Земли до Солнца, равное одной астрономической единице ( $\approx 149,6 \cdot 10^6$  км),  $l(t)$  – единичный вектор, направленный по прямой Земля-Солнце, нормы векторов Евклидовы:  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ .

Координатные оси  $(x_1, x_2)$  находятся в плоскости эклиптики, вектор  $l(t)$  направления на Солнце можно представить в виде:

$$l(t) = (\cos \omega t, \sin \omega t, 0),$$

где  $\omega$  – угловая скорость.

В рамках круговой ограниченной задачи трех тел Земля и Солнце движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс. Следствием третьего закона Кеплера является формула [8]:

$$\omega^2 R^3 = \gamma(m_1 + m_2).$$

Обозначим частное решение (1.1):

$$x(t) = a * l(t) * R.$$

Это решение называется коллинеарной точкой либрации, где  $a \approx 0,01$  для ближайшей к Земле точке, как показано в [10], и означает, что точка находится на расстоянии около 0,01 а.е. от Земли.

Обозначим через  $y = (y_1, y_2, y_3)$  вектор скоростей:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{\gamma m_1 x}{\|x\|^3} + \gamma m_2 \left( \frac{Rl(t)-x}{\|Rl(t)-x\|^3} - \frac{l(t)}{R^2} \right) \end{cases} \quad (1.2)$$

Система (1.2) гамильтонова с Гамильтонианом:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \gamma \frac{m_1}{\|x\|} - \gamma m_2 \left( \frac{Rl(t)-x}{\|Rl(t)-x\|^3} - \frac{l(t)}{R^2} \right). \quad (1.3)$$

Для удобства единицу расстояния выберем так, чтобы выполнялось:  
 $\omega = 1, \gamma m_1 = 3$ .

Тогда:  $R^3 = \gamma(m_1 + m_2)$ ,  $\gamma m_2 = \frac{\gamma m_2(m_1+m_2)}{m_1+m_2} = \frac{R^3 m_2}{m_1+m_2} \approx R^3$ . Единицы времени полагаем так, что:  $1 \text{ год} = \frac{2\pi}{\omega}$  единиц времени, значит,  $1 \text{ ед. времени} = \frac{1 \text{ год}}{2\pi}$ .

С учетом введенных единиц Гамильтониан (1.3) перепишем в виде:

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \frac{3x}{\|x\|} - R^2 \left( \frac{1}{\|l(t)-\frac{x}{R}\|} - \frac{l(t)x}{R} \right), \quad (1.4)$$

И будем считать, что величины  $x$  и  $y$  имеют порядок единицы. Это означает, что движение КА происходит на расстоянии нескольких миллионов километров от Земли.

В гамильтониан (1.4) входит векторная величина  $\frac{x}{R}$ . Поскольку движение рассматривается в околоземном пространстве, эта величина относительно малая, имеет порядок сотых (0,01). Поэтому эти уравнения можно упростить методом хилловского приближения [1, 10], разложив солнечный потенциал  $\frac{1}{\|l(t)-\frac{x}{R}\|}$  в ряд Тейлора по величине  $\frac{x}{R}$ , и пренебрегая членами порядка больше двух.

После проведенных преобразований Гамильтониан принимает вид:

$$\tilde{H}(x, y, t) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \frac{3x}{\|x\|} + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \frac{3}{2}(l(t)x)^2, \quad (1.5)$$

а уравнения движения выглядят следующим образом:

$$\ddot{x} = -\frac{3x}{\|x\|^3} + 3l(t)(l(t)x) - x. \quad (1.6)$$

Частным решением уравнения (1.6):

$$x = l(t),$$

является точка либрации, которая в выше приведенных обозначениях будет находиться на 1 единицу расстояния от Земли. Такой выбор единиц является удобным для численного моделирования и представления его результатов и расчетов. Из уравнения (1.6) с помощью канонического преобразования поворота получены уравнения (1.7) [8], которые будут использованы для проведения исследования в данной работе (преобразование в фазовом пространстве, преобразование координат и импульсов):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + y_1 & \dot{y}_1 &= \frac{-3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1 & \dot{y}_2 &= \frac{-3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1 \\ \dot{x}_3 &= y_3 & \dot{y}_3 &= \frac{-3x_3}{\|x\|^3} - x_3 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Это уравнение хилловского приближения круговой ограниченной задачи трех тел во вращающейся системе координат для относительных координат. Отметим, что входящие в систему (1.7) компоненты вектора  $\dot{y}$  являются ускорениями, и в заданной системе единица ускорения равна  $5.93844 * 10^{-5} \text{ м/с}^2 \approx 6.05552 * 10^{-6} g$ , где  $g = 9.80665 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Точка либрации во вращающейся системе координат неподвижна и имеет координаты:

$$x^* = (1,0,0), y^* = (0,1,0).$$

Так как мы рассматриваем относительную систему с геоцентрическими координатами, положение Земли соответствует координатам:

$$x^3 = (0,0,0), y^3 = (0,0,0).$$

Координатная ось  $Ox_1$  направлена вдоль прямой Земля-Солнце.

Хорошо известно [7], что коллинеарная точка либрации  $L_1$  является неустойчивым решением системы. Это означает, что обеспечение длительного пребывания космического аппарата в окрестности этой точки

невозможно без применения управляющего воздействия. Позже будет показано применение управляющего воздействия, которое стабилизирует поведение космического аппарата в окрестности.

Сначала рассмотрим поведение космического аппарата (малого небесного тела) в окрестности точки либрации и траекторию его движения при условии отсутствия внешних управляющих на него воздействий; или неуправляемое орбитальное движение.

## **1.2 Траектория движения небесного объекта в окрестности точки либрации**

В окрестности точки либрации  $L_1$  на прямой Земля-Солнца в рамках круговой ограниченной задачи трех тел (центр инерции Земли расположен в начале координат) точка либрации согласно приведенным ранее уравнениям будет находиться на 1 единице расстояния от Земли (начала координат). Это расстояние равно приблизительно 0,01 а.е. ( $\approx 1,496 * 10^6$  км)

Рассмотрим ее окрестность и определим начальное положение космического аппарата. По оси  $Ox_1$ , направленной вдоль прямой Земля-Солнце, выберем два положения в окрестности точки либрации  $L_1$ , с отклонением по прямой на 0,05 единиц расстояния в соответствии с заданными единицами расстояния системы, указанной в Гл.1 П.1.1. Таким образом, координаты точки либрации и начального положения космического аппарата:

Точка  $L_1$ :  $x^* = (1, 0, 0)$ ,  $y^* = (0, 1, 0)$ .

1) Случай:  $x^1 = (0.95, 0, 0)$ ,  $y^1 = (0, 1, 0)$ .

2) Случай:  $x^2 = (1.05, 0, 0)$ ,  $y^2 = (0, 1, 0)$ .

Это означает, что в начальный момент времени в рассматриваемой задаче моделирования неуправляемого движения космический аппарат помещен на прямой Земля-Солнце на 0,05 единиц расстояния ближе к Земле от положения точки либрации  $L_1$ , и находится на расстоянии  $\approx 1,421 * 10^6$  км

от Земли в первом случае; и на 0,05 единиц расстояния дальше от Земли  $\approx 1,571 * 10^6$  км – во втором случае, а расстояние от космического аппарата до  $L_1$  одинаково в обоих случаях  $\approx 74,78 * 10^3$  км.

Посмотрим, как происходит движение космического аппарата, помещенного в эти точки, при условии, что на него не воздействует внешний управляющий регулятор; т.е. построим траекторию нестабилизируемого движения в окрестности точки либрации  $L_1$ .

Для того чтобы построить траекторию неуправляемого движения в окрестности точки либрации  $L_1$ , воспользуемся уравнениями хилловского приближения круговой ограниченной задачи трех тел во вращающейся системе координат для относительных координат (1.7), зададим начальные положения Земли и КА, и рассматриваемый промежуток времени. Как указывалось ранее единица времени в рассматриваемой постановке задачи =  $\frac{1 \text{ год}}{2\pi}$ . Возьмем 10 таких единиц, т.е. построим траекторию движения КА за  $= \frac{10 \text{ лет}}{2\pi} \approx 1,59 \text{ лет} \approx 19 \text{ мес.}$  или 1 год и 7 мес.

Воспользуемся прикладным пакетом MATLAB, в котором проинтегрируем систему методом Рунге-Кутты 4 и 5 порядка точности.

### 1.2.1. Случай 1

Уравнения движения (1.7):

$$\dot{x}_1 = x_2 + y_1 \quad \dot{y}_1 = \frac{-3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2$$

$$\dot{x}_2 = y_2 - x_1 \quad \dot{y}_2 = \frac{-3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1$$

$$\dot{x}_3 = y_3 \quad \dot{y}_3 = \frac{-3x_3}{\|x\|^3} - x_3$$

Координаты Земли:  $x^3 = (0, 0, 0)$ ,  $y^3 = (0, 0, 0)$ ,

Координаты точка либрации:  $x^* = (1, 0, 0)$ ,  $y^* = (0, 1, 0)$ ,

Начальное положение КА:  $x^1 = (0.95, 0, 0)$ ,  $y^1 = (0, 1, 0)$ .

Временной промежуток:  $t = 10$ .

Результат отображен на рис. 1, код программы можно увидеть в Приложении 1. Необходимо уточнить, что на графике не отображено положение Солнца в силу того, что ранее солнечный потенциал был разложен в ряд, и вообще говоря, в такой постановке задачи Солнце располагается на бесконечности, в связи с малым воздействием на КА и большой удаленностью.

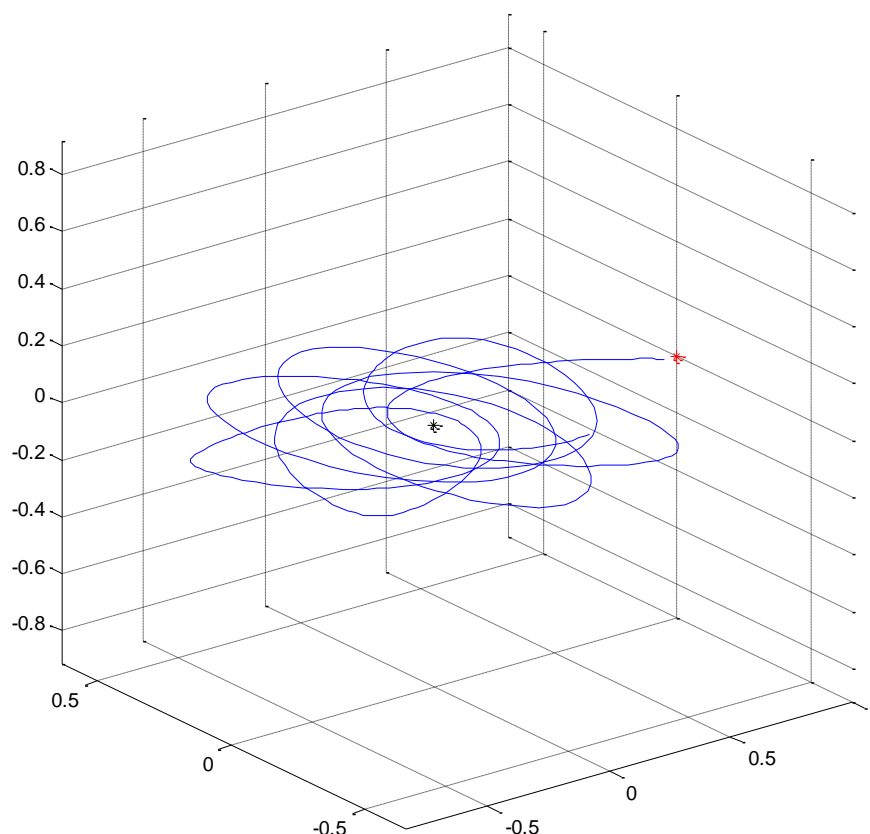


Рис. 1

На рис. 1 красной звездочкой отмечена точка либрации  $L_1$ , а черной звездочкой – Земля, траектория неуправляемого движения описана синей кривой. За рассматриваемый промежуток времени ( $t = 10$ ) по результатам построения траектории неуправляемого движения КА, помещенного в окрестность точки либрации со смещением в сторону Земли, стоит отметить, что КА под воздействием притягивающих сил Земли начинает совершать эллиптические вращения вокруг нее, отдаляясь от окрестности точки либрации. Согласно изменениям значений координат КА, возвращения в желаемую окрестность  $L_1$  за указанный промежуток времени не происходит.



С графиком изменения значений координат  $x_1$  и  $x_2$  в зависимости от изменения времени пошагово можно ознакомиться на рис.2.

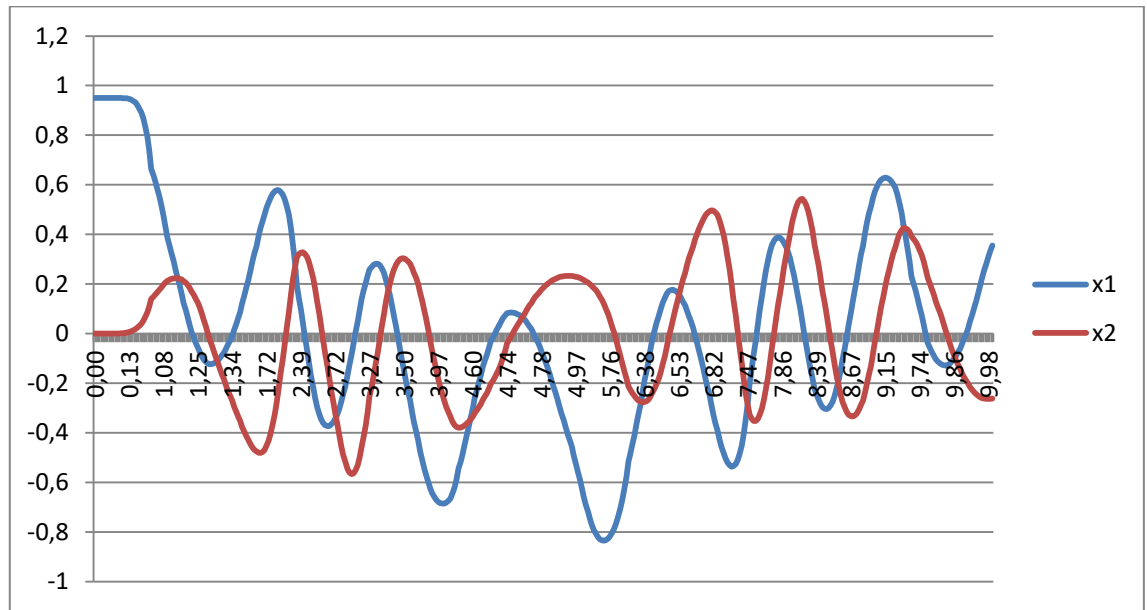


Рис.2

Стоит отметить важные с точки зрения поставленной задачи значения координаты  $x_1$ : в тот момент, когда значение отклоняется к нулевому, КА приближается к Земле, а если обе координаты  $x_1$  и  $x_2$  одновременно достаточно малы — КА сталкивается с Землей. В моменты, когда  $x_1$  приближается к нулю, а  $x_2$  — отдаляется, КА не сталкивается с Землей, а облетает ее с той или с другой стороны в плоскости эклиптики. Но эта ситуация также крайне нежелательна в рамках поставленной задачи, т.к. КА не сохраняет свое положение в окрестности точки либрации.

### 1.2.2. Случай 2

Уравнения движения (1.7):

$$\dot{x}_1 = x_2 + y_1 \quad \dot{y}_1 = \frac{-3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2$$

$$\dot{x}_2 = y_2 - x_1 \quad \dot{y}_2 = \frac{-3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1$$

$$\dot{x}_3 = y_3 \quad \dot{y}_3 = \frac{-3x_3}{\|x\|^3} - x_3$$

Координаты Земли:  $x^3 = (0, 0, 0), y^3 = (0, 0, 0),$

Координаты точка либрации:  $x^* = (1, 0, 0)$ ,  $y^* = (0, 1, 0)$ ,

Начальное положение КА:  $x^2 = (1.05, 0, 0)$ ,  $y^2 = (0, 1, 0)$ .

Временной промежуток:  $t = 10$ .

Результат отображен на рис. 3, код программы можно увидеть в Приложении 2.

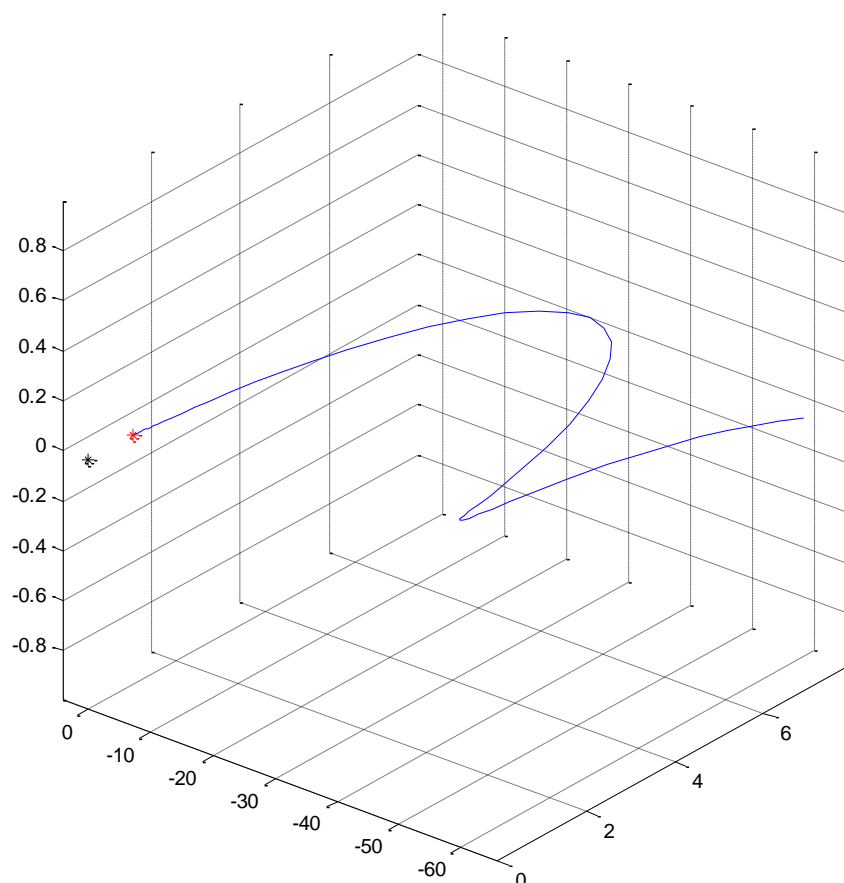


Рис.3

На рис.3 по аналогии с рис.1 Земля отмечена черной звездой, а точка либрации  $L_1$  – красной, траектория неуправляемого движения описана синей кривой. Необходимо заметить, что важным моментом в данном построении траектории движения КА является его уход из окрестности точки либрации, поскольку расстояние от Земли существенно увеличивается, и метод Хилла становится некорректным, т.е. после покидания окрестности точки либрации траектория движения КА может не соответствовать графику с определенного момента времени.

С графиком изменения значений координат  $x_1$  и  $x_2$  в зависимости от

изменения времени пошагово можно ознакомиться на рис.4,

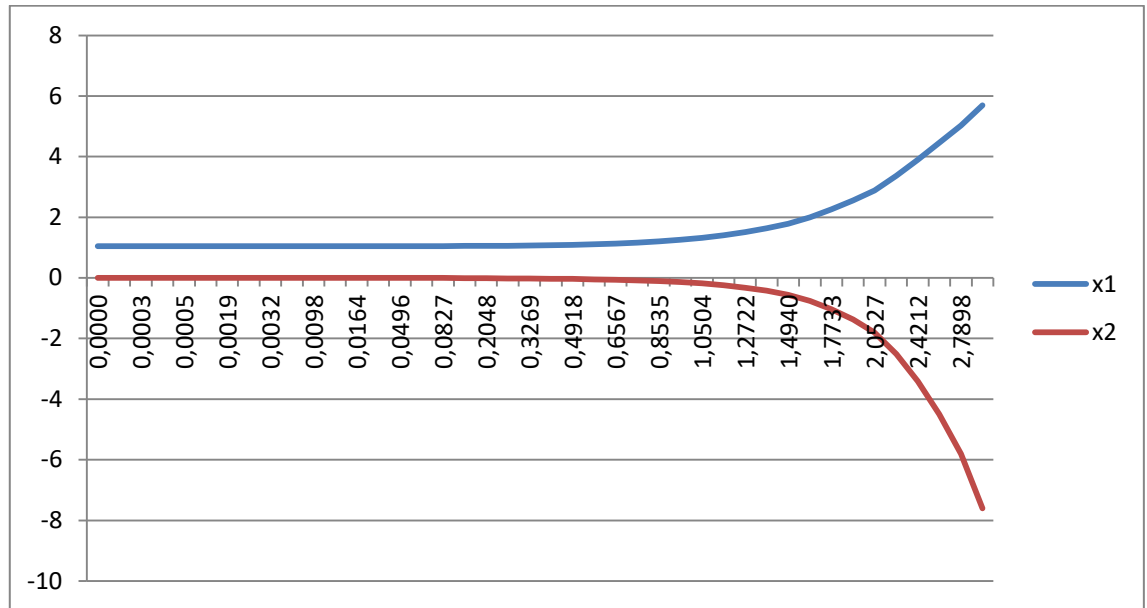


Рис.4

однако в отличие от графика на рис. 2, изменения диапазон времени на графике взят до 3 единиц времени ( $\approx 3 * \frac{1 \text{ год}}{2\pi} \approx 3 \text{ мес. 25 дн.}$ ) для наглядности, в дальнейшем нельзя точно сказать, как именно изменяются координаты  $x_1$  и  $x_2$ , но очевидно возвращения в окрестность точки либрации  $L_1$  за рассматриваемый промежуток времени не происходит.

Согласно проведенным исследованиям можно говорить о том, что при помещении КА в окрестность точки либрации  $L_1$  на 1 единицу расстояния в рамках поставленной задачи ( $\approx 74,78 * 10^3$  км) за 10 единиц времени ( $\approx 19$  мес. или 1 год и 7 мес.) его траектория движения не только покидает заданную окрестность в обоих случаях, но и не исключает в перспективе столкновение с Землей и т.п. Таким образом, остается необходимость применения некоторого управляющего воздействия с целью сохранить пребывание КА в заданной окрестности на желаемый период времени.

## Глава 2. Стабилизация движения в окрестности точки либрации

Рассмотрим возможность стабилизации движения КА в окрестности точки либрации и применим ее в рамках поставленной задачи; т.е. построим управляемое орбитальное движение.

### 2.1 Управляемое орбитальное движение

Обратимся к исследованиям в статье [10], где говорится, что для уравнения движения в хилловском приближении для круговой ограниченной задачи трех тел (1.6) можно применить направленное по прямой Земля-Солнце некоторое управляющее воздействие. Таким образом, уравнения управляемого движения представимы в следующем виде:

$$\ddot{x} = -\frac{3x}{\|x\|^3} + 3l(t)(l(t)x) - x + ul(t). \quad (2.1)$$

А при каноническом повороте во вращающейся системе координат уравнения (2.1) примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + y_1 & \dot{y}_1 &= \frac{-3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 + u(x, y) \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1 & \dot{y}_2 &= \frac{-3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1 \\ \dot{x}_3 &= y_3 & \dot{y}_3 &= \frac{-3x_3}{\|x\|^3} - x_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Задача стабилизации [14] заключается в построении управления  $u(x, y)$  такого, что точка либрации  $(x^*, y^*)$  будет решением системы (2.2), устойчивым по Ляпунову.

Предлагается рассмотреть линеаризованные уравнения системы (2.2) и представить управление в качестве линейного регулятора. Стоит отметить, что это не единственное возможное представление управления. Линеаризованные уравнения системы в окрестности точки либрации представлены ниже:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + y_1 & \dot{y}_1 &= 8(x_1 - 1) + (y_2 - 1) + u(x, y) \\
\dot{x}_2 &= y_2 - x_1 & \dot{y}_2 &= -4x_2 - y_1 \\
\dot{x}_3 &= y_3 & \dot{y}_3 &= -4x_3
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

Устойчивость по линейному приближению достигается при представлении управляющего регулятора в виде:

$$u(x, y) = -8(x_1 - 1) - (y_2 - 1) - y_1. \tag{2.4}$$

В дальнейшем, исследования будут основываться на приведенных в [10] теоремах об устойчивости коллинеарной точки либрации  $L_1$ :

*Теорема 1.* Существует линейный регулятор  $u(x, y)$  такой, что точка либрации  $(x^*, y^*)$  является стационарным решением системы, устойчивым по Ляпунову в линейном приближении.

Стабилизация орбитального движения в общем случае, т.е. не в линейном приближении (о чем говорилось выше), возможна, если рассматривать некоторую окрестность точки либрации. Приведем следующую теорему:

*Теорема 2.* Существует линейный регулятор  $u_1(x, y)$  такой, что точка либрации  $(x^*, y^*)$  есть стационарное решение нелинейной управляемой системы (2.2), устойчивое по Ляпунову.

Доказательство последней теоремы проводится через рассмотрения гамильтонианов нелинейной системы (2.2) и линеаризованной системы (2.3). Линейный регулятор представлен в виде:

$$u_1(x, y) = \{k(x_1 - 1) | k < -9\}, \tag{2.5}$$

Нужно сказать, что линейный регулятор такого вида обеспечивает управляющее воздействие на ускорение КА по прямой Земля-Солнце, это означает, что в рамках поставленной задачи он направлен по оси  $Ox_1$ . Его компоненты представляют собой ускорение. Как ранее указывалось, единица ускорения в заданной системе равна  $5.93844 * 10^{-5} \text{ м/с}^2 \approx 6.05552 * 10^{-6} g$ , где  $g = 9.80665 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Поскольку гамильтониан нелинейной системы:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \frac{3x}{\|x\|} + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \frac{3}{2}(x_1)^2 + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{k}{2}(x_1 - 1)^2 \quad (2.6)$$

не зависит от времени и не возрастает на траекториях системы (2.2) (его производная равна нулю), а гамильтониан линеаризованной системы

$$H_{lin}(x, y) = \frac{1}{2}(y_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(y_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}y_3^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_3^2 - \left(\frac{9+k}{2}\right)(x_1 - 1)^2 \quad (2.7)$$

является положительно-определенной квадратичной формой при значении коэффициента  $k < -9$ , то гамильтониан (2.6) будет функцией Ляпунова системы (2.2) в некоторой окрестности точки либрации.

Важно подчеркнуть, что из доказательства *Теоремы 2* следует, что условия представления линейного регулятора (2.5) (ограничения коэффициента  $k < -9$ ), при которых решение системы (2.6) будет устойчивым по Ляпунову, являются необходимыми.

## 2.2 Траектория управляемого движения небесного объекта в окрестности точки либрации

Согласно выше указанным исследованиям для некоторой окрестности точки либрации  $L_1$  можно подобрать линейный регулятор, направленный по линии Земля-Солнце, вида (2.5), и при выполнении условия  $k < -9$  точка либрации будет решением системы (2.2) устойчивым по Ляпунову. Это значит, что с помощью такого управляющего воздействия можно обеспечить длительное пребывание КА в окрестности точки либрации.

Применим управление вида (2.5) в заданной окрестности точки либрации, и убедимся, что при выполнении условия для коэффициента при  $x_1$  траектория движения КА сохраняется в окрестности  $L_1$ .

Введем управляющий регулятор линейного вида (2.5):

$$u(x, y) = \{k(x_1 - 1) | k < -9\}.$$

Выполним условие устойчивости решения системы (2.2) для линейного регулятора (2.5), выбрав одно из допустимых значений параметра  $k$ , положив  $k = -12 < -9$ , соответственно, закон управления будет иметь следующий вид:

$$u(x, y) = -12(x_1 - 1).$$

Можно рассмотреть и другие значения коэффициента  $k$ , которые будут меньше «-9». На данном этапе важно посмотреть, как стабилизируется траектория движения в заданной окрестности  $L_1$ . Позже будет решена задача о поиске наиболее подходящего с точки зрения ресурсных затрат представления управляющего регулятора.

### 2.2.1 Случай 1

Как и при рассмотрении неуправляемого орбитального движения, координаты точки либрации, Земли и начальное положение космического аппарата будут теми же:

Рассмотрим уравнения управляемого движения (2.2):

$$\dot{x}_1 = x_2 + y_1; \quad \dot{y}_1 = \frac{-3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 + u(x, y);$$

$$\dot{x}_2 = y_2 - x_1; \quad \dot{y}_2 = \frac{-3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1;$$

$$\dot{x}_3 = y_3; \quad \dot{y}_3 = \frac{-3x_3}{\|x\|^3} - x_3;$$

Линейный регулятор:  $u(x, y) = -12(x_1 - 1)$

Координаты Земли:  $x^3 = (0, 0, 0), y^3 = (0, 0, 0)$ ,

Координаты точка либрации:  $x^* = (1, 0, 0), y^* = (0, 1, 0)$ ,

Начальное положение КА:  $x^1 = (0.95, 0, 0), y^1 = (0, 1, 0)$ .

Временной промежуток:  $t = 10$ .

Результат отображен на рис. 5, код программы можно увидеть в Приложении 3.

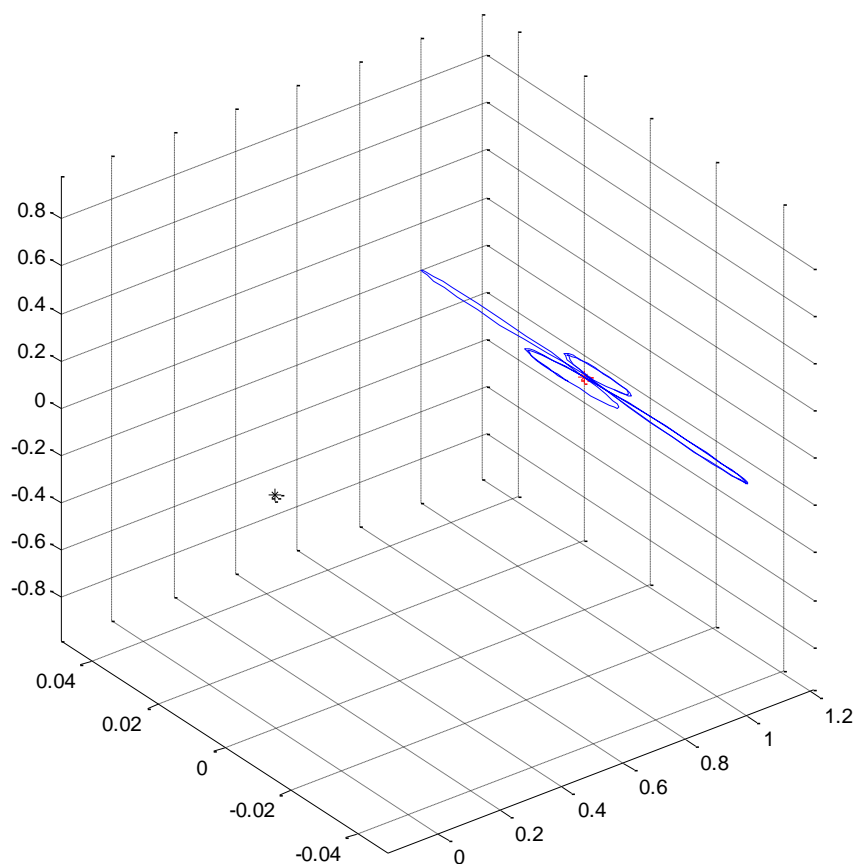


Рис. 5

На рис. 5, как и ранее, черной звездой отмечено положение Земли, красной звездой – точка либрации, а траектория движения КА описана синей кривой. В масштабе рис.1 аналогичного построения траектории неуправляемого КА, помещенного в указанное начальное положение, управляемое движение для наглядности отображено на рис.6



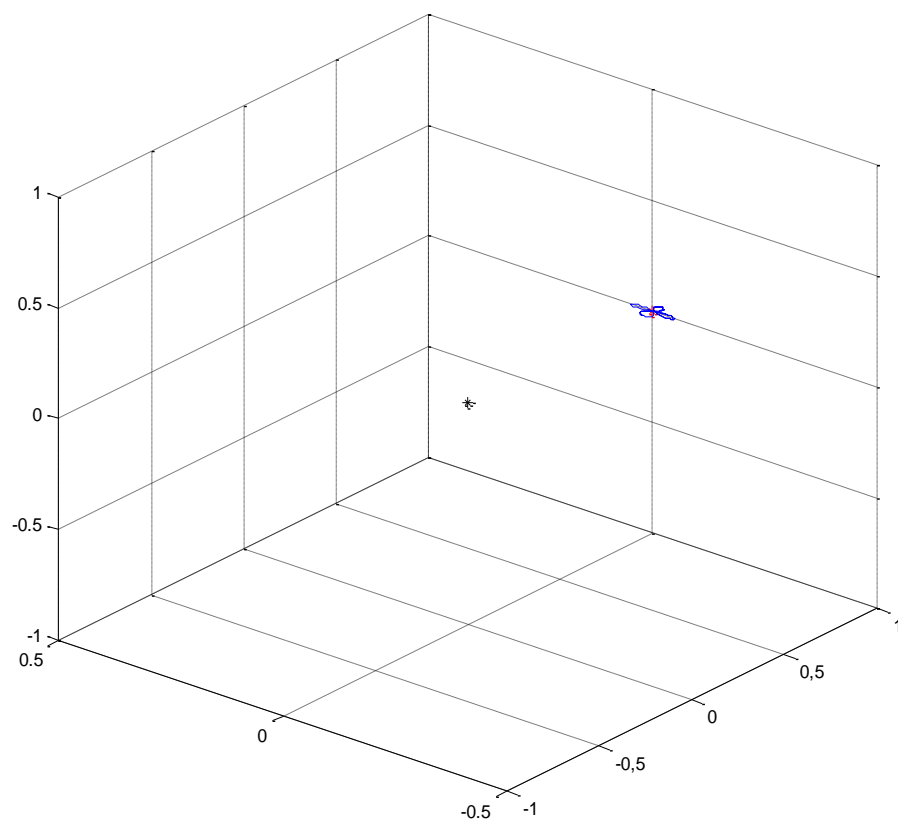


Рис.6

Согласно полученным графикам, можно сделать предположение, что отклонения КА от своего начального положения за рассматриваемый промежуток времени незначительны, в подтверждение тому приведем ниже рис.7, на котором отображен график изменения значений координат  $x_1$  и  $x_2$  пошагово зафиксированные в моменты времени.

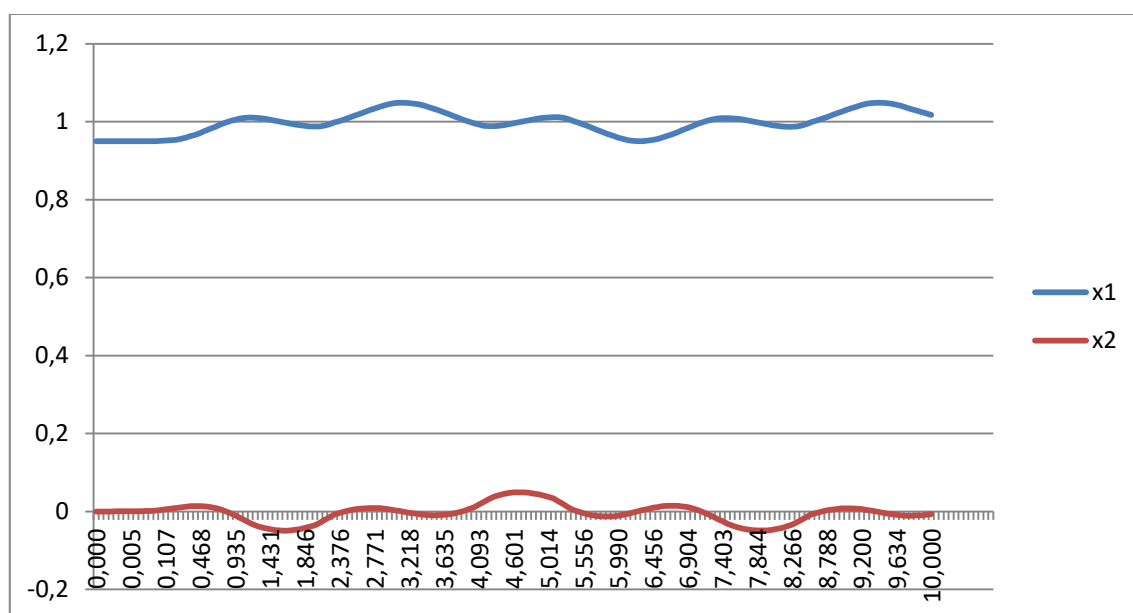


Рис.7

На рис.7 очевидны незначительные колебания значений координат  $x_1$  и  $x_2$ . Приведем расчет прироста значений координат:

Максимальное значение координаты  $x_1^1$ :  $\max_t x_1^1 \approx 1,0486$ ,

Минимальное значение координаты  $x_1^1$ :  $\min_t x_1^1 \approx 0.95$ ,

Амплитуда колебания значений координаты  $x_1^1$ :  $\Delta_{x_1^1} \approx 0.0986$ .

Максимальное значение координаты  $x_2^1$ :  $\max_t x_2^1 \approx 0,0492$ ,

Минимальное значение координаты  $x_2^1$ :  $\min_t x_2^1 \approx -0.0492$ ,

Амплитуда колебания значений координаты  $x_2^1$ :  $\Delta_{x_2^1} \approx 0.0985$ .

Показатели амплитуды колебания значений координат  $\Delta_{x_1^1}$  и  $\Delta_{x_2^1}$  говорят о том, что отклонения КА на заданном промежутке времени по данным координатам не превышают 0,1 единиц расстояния, т.е.  $\approx 149,56 * 10^3$  км.

### 2.2.2 Случай 2

Рассмотрим уравнения управляемого движения (2.2):

$$\dot{x}_1 = x_2 + y_1; \quad \dot{y}_1 = \frac{-3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 + u(x, y);$$

$$\dot{x}_2 = y_2 - x_1; \quad \dot{y}_2 = \frac{-3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1;$$

$$\dot{x}_3 = y_3; \quad \dot{y}_3 = \frac{-3x_3}{\|x\|^3} - x_3;$$

Линейный регулятор:  $u(x, y) = -12(x_1 - 1)$

Координаты Земли:  $x^3 = (0, 0, 0), y^3 = (0, 0, 0)$ ,

Координаты точка либрации:  $x^* = (1, 0, 0), y^* = (0, 1, 0)$ ,

Начальное положение КА:  $x^2 = (1.05, 0, 0), y^2 = (0, 1, 0)$ .

Временной промежуток:  $t = 10$ .

Результат отображен на рис. 8, код программы можно увидеть в Приложении 4.

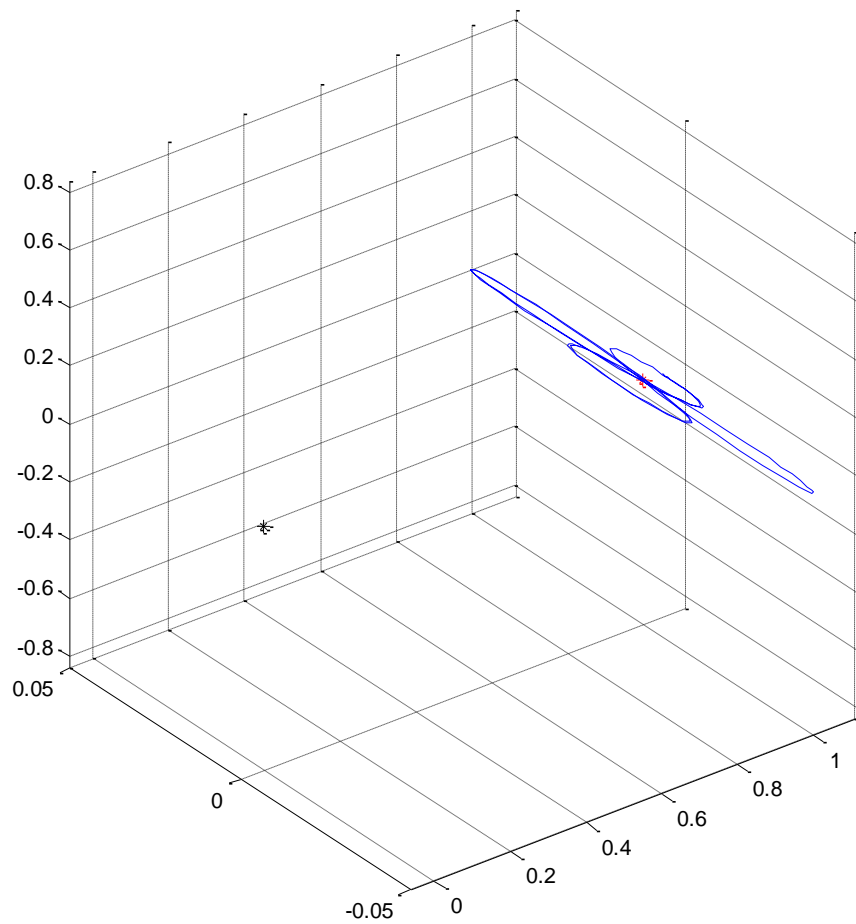


Рис.8

Как и для **Случая 1** масштабируем рис.8 и покажем для наглядности рис.9 в масштабе, близком к масштабу рис.3 (отклонения координаты  $x_2$  задано до значения «-8», т.к. исследование дальнейшего отклонения не представляет интереса), где отображен график траектории неуправляемого движения КА для **Случая 2**.

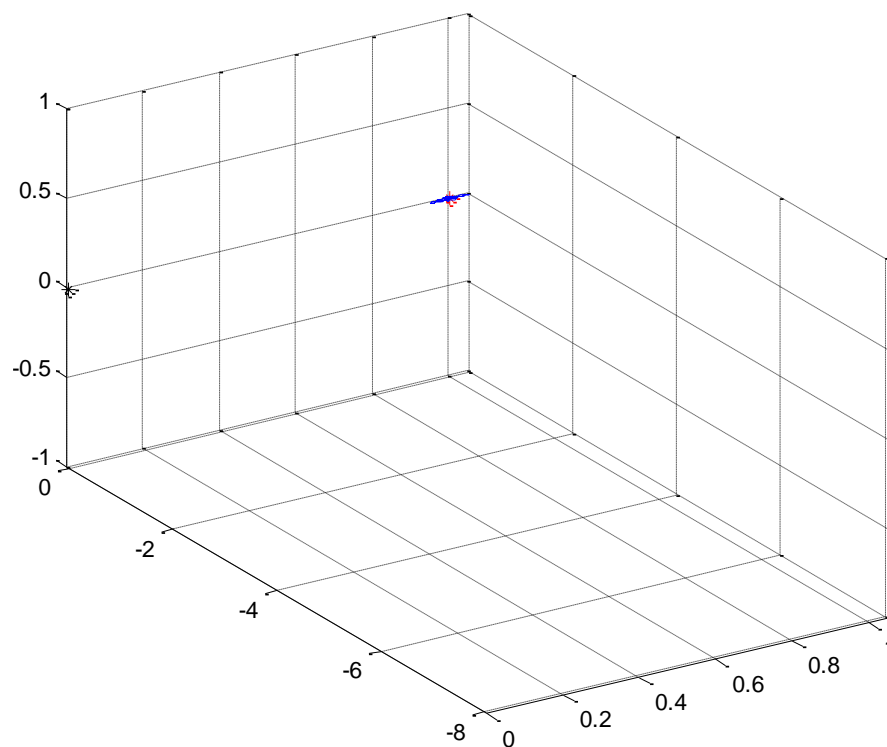


Рис.9

Аналогично **Случаю 1** проведем анализ изменения значений координат  $x_1$  и  $x_2$  за рассматриваемый промежуток времени. График изменения пошагово в моменты времени приведен на рис. 10.

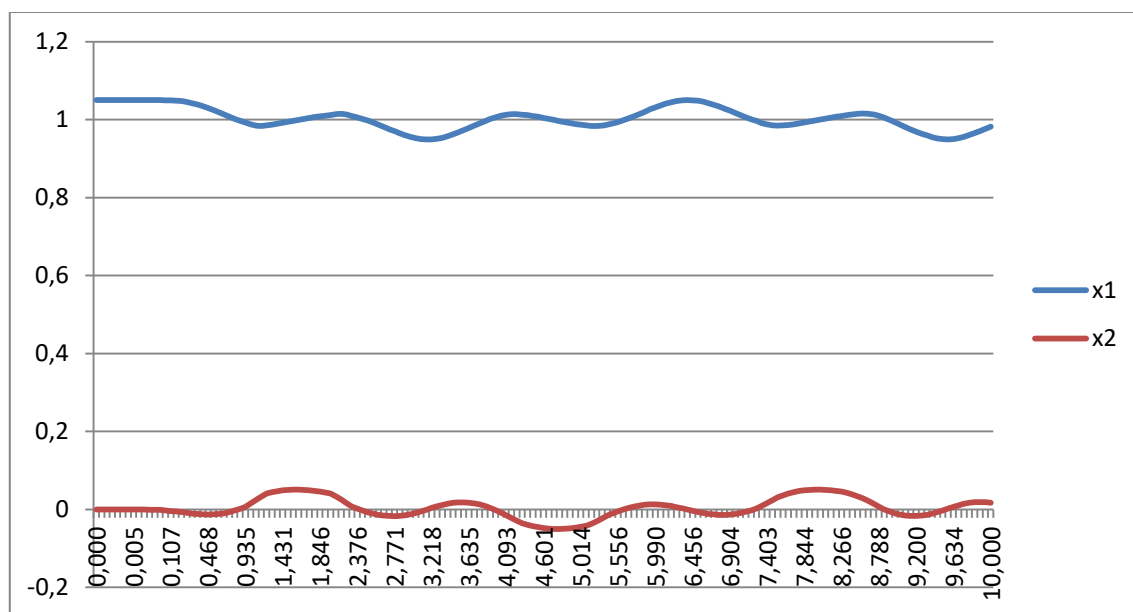


Рис.10

Обратим внимание на незначительные колебание значений координат  $x_1$  и  $x_2$  и приведём расчет прироста значений координат:

Максимальное значение координаты  $x_1^2$ :  $\max_t x_1^2 \approx 1.05$ ,

Минимальное значение координаты  $x_1^2$ :  $\min_t x_1^2 \approx 0.949$ ,

Амплитуда колебания значений координаты  $x_1^2$ :  $\Delta_{x_1^2} \approx 0.101$ .

Максимальное значение координаты  $x_2^2$ :  $\max_t x_2^2 \approx 0.05$ ,

Минимальное значение координаты  $x_2^2$ :  $\min_t x_2^2 \approx -0.05$ ,

Амплитуда колебания значений координаты  $x_2^2$ :  $\Delta_{x_2^2} \approx 0.101$ .

Показатели амплитуды колебания значений координат  $\Delta_{x_1^2}$  и  $\Delta_{x_2^2}$  говорят о том, что отклонения КА на заданном промежутке времени по данным координатам не превышают 0,101 единиц расстояния, т.е.  $\approx 151,06 * 10^3$  км.

Такие показатели для **Случая 1** и **Случая 2** говорят о том, что выбранное выше допустимое управление из семейства (2.5) при выполнении условия для устойчивости по Ляпунову решения системы (2.2), стабилизирует движения КА, сохраняя его положение на выбранный промежуток времени в заданной окрестности точки либрации  $L_1$ .

Убедившись в возможности стабилизировать движение КА, помещенного в окрестность точки либрации  $L_1$  с помощью некоторого линейного регулятора, поставим задачу определить возможное его оптимальное представление с целью уменьшения управляющего воздействия на КА, но при этом сохраняя его стабилизирующий эффект за рассматриваемый промежуток времени.

Данная постановка задачи актуальна с точки зрения практического применения подобного воздействия ввиду того, что современные технологии и возможности человечества ограничены. А значит, необходимо исследовать, как минимизировать ресурсы, необходимые для воздействия на КА, помещенный в окрестность точки либрации, для возможности управления

его положением с помощью, например, такого устройства как солнечный парус.

Однако важным моментом при реализации управляющего воздействия с использованием солнечного паруса является возможность в рамках поставленной задачи расчета необходимого ускорения или, так называемую, «парусность», но невозможность расчета площади и силы аппарата, так как в работе не учитывается его характеристики. В дальнейшем, можно усовершенствовать задачу, взяв в рассмотрения начальные данные с параметрами солнечного паруса, и провести расчеты не только ускорения, но и сил, и размеров.

## Глава 3. Оптимизация стабилизирующего управления

### 3.1 Критерий оценки стабилизирующего управления.

Для решения задачи оптимизации управляемой траектории введем специальную характеристику, которая позволит оценить управляющее воздействие.

Рассмотрим следующий функционал:

$$\mathcal{F} = \max_{0 \leq t \leq 10} |u(x, y)| = \max_{0 \leq t \leq 10} |k(x_1(t) - 1)|, \quad (3.1)$$

где  $k < -9$ .

Этот функционал неаддитивный и характеризует максимальное управляющее воздействие на КА вдоль траектории движения.

Нужно сказать, что выбор такого представления функционала оценки выбираемого управления не единственно возможный. Он обусловлен постановкой задачи, а именно, его минимизация позволит найти сравнительно малые воздействия на КА, которые как раз могут быть обеспечены таким экзотическим средством как солнечный парус.

В работах [11] и [12] рассмотрены другие возможные функционалы для оценки расхода энергии, необходимой для совершения передвижения КА на заданном промежутке времени  $[0; T]$ :

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \int_0^T |u_i| dt \text{ и}$$
$$J_2 = \sum_{i=1}^n |u_i| \Delta t.$$

Представленные функционалы описывают расход топлива при воздействии реактивных ускорений на орбитальное движение, что также может быть использовано в практическом применении, но не может быть обеспечено солнечным парусом. Возможные управляющие воздействия солнечного паруса обеспечены солнечным давлением и сравнительно малы.

Таким образом, задача оптимизации заключается в поиске такого

управления, которое обеспечит стабилизирующих эффект и минимизирует введенный выше критерий оптимальности (3.1):

$$\mathcal{F} = \max_{0 \leq t \leq 10} |u(x, y)| = \max_{0 \leq t \leq 10} |k(x_1(t) - 1)| \rightarrow \min, \quad (3.2)$$

Нужно сказать, что минимизацию критерия (3.2) можно обеспечить подбором подходящего  $k$  – коэффициента, который может быть выбран по нашему усмотрению, тогда как значения координаты  $x_1$  не могут быть заданы произвольно, а получены в ходе решения системы.

Перейдем к математической постановке задачи нахождения оптимального, с критерием оптимальности (3.2), управления на заданной траектории движения.

### 3.2 Математическая постановка задачи оптимизации

Как и прежде рассмотрим систему уравнений управляемого движения круговой ограниченной задачи трех тел в хилловском приближении в относительных координатах (Земля – в начале координат) (2.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + y_1; & \dot{y}_1 &= \frac{-3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 + u(x, y); \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1; & \dot{y}_2 &= \frac{-3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1; \\ \dot{x}_3 &= y_3; & \dot{y}_3 &= \frac{-3x_3}{\|x\|^3} - x_3, \end{aligned}$$

где управление имеет вид (2.5):

$$u(x, y) = \{k(x_1 - 1) | k < -9\}.$$

Оценка выбранного управления (3.1):

$$\mathcal{F} = \max_{0 \leq t \leq 10} |u(x, y)| = \max_{0 \leq t \leq 10} |k(x_1 - 1)|,$$

где  $k < -9$ .

Оптимизация выбранного управления (3.2):

$$\mathcal{F} = \max_{0 \leq t \leq 10} |k(x_1 - 1)| \rightarrow \min,$$

где  $k < -9$ .

Координаты Земли:  $x^3 = (0, 0, 0), y^3 = (0, 0, 0)$ ,



Координаты точки либрации:  $x^* = (1, 0, 0), y^* = (0, 1, 0)$ .

Таким образом, требуется определить значение параметра  $k$ , при котором модуль управляющего воздействия на траектории будет минимальным. Эту задачу будем решать с помощью численного моделирования орбитального управляемого движения.

### **3.3 Поиск линейного регулятора для КА при фиксированных начальных данных.**

Перейдем непосредственно к решению задачи оптимизации. В первую очередь, посмотрим, какое оптимальное с точки зрения заданных критериев управляющее воздействие найдется для выше рассмотренных начальных положений космического аппарата. Для поиска подходящих значений коэффициента  $k$  из семейства стабилизирующих управлений (3.2):

$$u(x, y) = \{k(x_1 - 1) | k < -9\}$$

проведем численный эксперимент.

Для качественного исследования с помощью численного эксперимента будем придерживаться следующего алгоритма:

- 1) Рассмотрим значения коэффициента  $k$  с шагом в 0,05, начиная с позиции «-9». При возникающей необходимости уменьшаем шаг, сравниваем результаты с меньшим шагом, например, 0,01, выбираем наиболее подходящее значение.
- 2) Фиксируем изменения значения координаты  $x_1$  на заданном промежутке времени  $t \in [0; 10]$ , наибольшее внимание уделяем минимальному и максимальному значению – это охарактеризует отклонение КА от начального положения по оси  $Ox_1$ .
- 3) Для каждого выбранного значения коэффициента  $k$  строим траекторию движения КА.
- 4) Убедимся в стабилизации движения на заданном промежутке времени. Увеличиваем модуль коэффициента, пока движение КА в

окрестности точки либрации не будет стабилизировано.

- 5) Рассчитаем максимальное значение управляющего воздействия по модулю  $\mathcal{F}$ , в зависимости от выбранного коэффициента и значений координаты  $x_1$  на заданном промежутке.
- 6) Сравниваем максимальные значения управляющего воздействия при разных заданных значениях коэффициенты  $k$ , и среди стабилизирующих управлений выбираем минимальное по модулю, таким образом решая задачу оптимизации  $\mathcal{F} \rightarrow \min$ .

### 3.4 Численное моделирование.

Наиболее интересными для исследования будут случаи 1 и 2, рассмотренные в Главе 2. Для них уже рассмотрено значение коэффициента  $k = -12$ . Посмотрим, является ли полученное ранее управление оптимальным.

Воспользуемся, как и ранее, прикладным пакетом MATLAB, а полученные данные фиксируем в программе Microsoft Office Excel.

#### 3.4.1 Случай 1.

Рассмотрим упомянутый в Главе 1 п.1.2 случай начального положения космического аппарата, помещенного в окрестность точки либрации на расстоянии в 0,05 единиц расстояния ( $\approx 74,78 * 10^3$  км) по прямой Земля-Солнце ближе к Земле ( $\approx 1,421 * 10^6$  км от Земли).

Начальное положение КА:  $x^1 = (0.95, 0, 0)$ ,  $y^1 = (0, 1, 0)$ ,

Приведем некоторые результаты численного эксперимента в Таблице 1, где, согласно алгоритму, для каждого значения коэффициента  $k$  фиксируем максимальное  $Max(x_1(t))$  и минимальное  $Min(x_1(t))$  значение координаты  $x_1$  на траектории, а так же приводим рассчитанное максимальное по модулю значение управляющего воздействия  $\max_{0 \leq t \leq 10} |u|$  на заданном

промежутке.

Подробно все вычисления можно увидеть в Приложении 5.

$x_1(0) = 0.95$			
$k$	$Max(x_1(t))$	$Min(x_1(t))$	$\max_{0 \leq t \leq 10}  u $
-9	0,969591	-0,01429	9,128625
-9,3	0,975525	0,065592	9,20605
-9,375	1,008013	0,95	0,46875
-9,38	1,011647	0,95	0,469
-9,4	1,020152	0,95	0,47
-9,5	1,037721	0,95	0,475
-9,6	1,036424	0,95	0,48
-9,7	1,039658	0,95	0,485
-10	1,042616	0,95	0,5
-11	1,045812	0,95	0,55
-12	1,048595	0,95	0,6
-20	1,048792	0,95	1
-50	1,048862	0,95	2,5

Табл.1

Из таблицы можно отметить, что управляющее воздействие с коэффициентом больше «-9,375» не оказывало стабилизирующего эффекта. Такое предположение подтверждается показателями минимального значения координаты  $x_1$  на траектории для заданного  $k$ . На траектории эта координата отклоняется до нулевого значения, откуда следует, что по оси  $Ox_1$  КА значительно отклоняется от своего начального положения. Также отметим, что наименьшее значение управляющего воздействия достигается при значении коэффициента  $k = -9.375$ , и равно  $\max_{0 \leq t \leq 10} |u| = 0.46875$  (в таблице 1 строка выделена красным цветом). Это значение представлено в единицах ускорения заданной системы, приведенное значение равно

$\max_{0 \leq t \leq 10} |u| = 0.46875 * 5.93844 * 10^{-5} \text{ м/с}^2 = 2,784 * 10^{-5} \text{ м/с}^2 \approx 2,84 * 10^{-6} g$ , где  $g$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Приведем график зависимости изменения  $x_1$  при некоторых рассмотренных значениях коэффициента  $k$ .

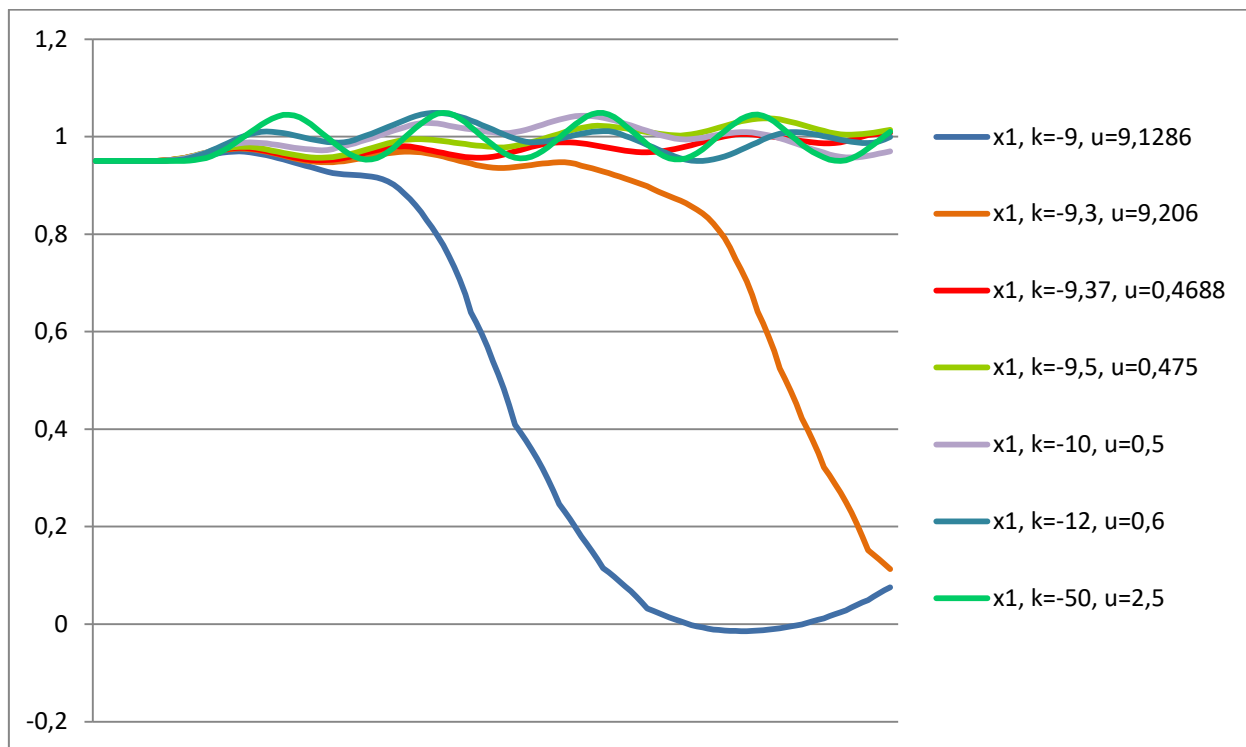


Рис.11

На графике, как и согласно результатам вычисления в табл.1, можно заметить, что при значениях коэффициента управляющего воздействия  $k = -9.0$  и  $k = -9.3$  стабилизирующего эффекта не возникает, и значение координаты  $x_1$  отклоняется до нулевого. Траектория движения КА в случае оптимального управления  $\max_{0 \leq t \leq 10} |u| = 0,4688$ , где  $k = -9.375$  выделена красным цветом на графике. Отметим, что в этом случае наблюдается минимальное колебание значений координаты  $x_1$ .

### 3.4.2 Случай 2.

Проведем аналогичный эксперимент для начального положения космического аппарата согласно Главе 1 п.1.2, расположенного на расстоянии  $\approx 1,571 * 10^6$  км от Земли по прямой Земля-Солнце:

Начальное положение КА:  $x^2 = (1.05, 0, 0)$ ,  $y^2 = (0, 1, 0)$ .

Приведем некоторые результаты численного эксперимента в Таблице 2, по аналогии, для каждого значения коэффициента  $k$  фиксируем максимальное  $Max(x_1(t))$  и минимальное  $Min(x_1(t))$  значение координаты  $x_1$  на траектории, а так же приводим рассчитанное максимальное по модулю значение управляющего воздействия  $\max_{0 \leq t \leq 10} |u|$  на заданном промежутке.

$x_1(0) = 1,05$			
$k$	$Max(x_1(t))$	$Min(x_1(t))$	$\max_{0 \leq t \leq 10}  u $
-9	1,05	0,90578	0,847962
-9,3	1,05	0,653373	3,223631
-9,5	1,05	0,823611	1,675694
-9,6	1,05	0,91241	0,840863
-9,7	1,05	0,93648	0,616142
-10	1,05	0,943499	0,565011
-10,343	1,05	0,9534	0,5175
-10,45	1,05	0,952607	0,5225
-10,5	1,05	0,952188	0,525
-11	1,05	0,949711	0,553184
-12	1,05	0,949045	0,611455
-20	1,05	0,94989	1,002205
-50	1,05	0,9502	2,5

Табл.2

Подробно с вычислениями можно ознакомиться в Приложении 6.

Стоит отметить, что колебания значений координаты  $x_1$  не так явно выражены, как в первом случае, однако при выбранных начальных данных случаи, когда значение коэффициента  $k$  больше «-10,343» – это случаи неустойчивого движения, что подтверждает ниже приведенный график изменения значений координаты  $x_1$ , и траектории, построенные в

прикладном пакете MATLAB. Согласно расчетам, наименьшее значение стабилизируемого управляющего воздействия достигается при значении коэффициента  $k = -10.343$  и равно  $\max_{0 \leq t \leq 10} |u| = 0.5175$  (в таблице 2 строка выделена красным цветом). Приведем значения требуемого управляющего ускорения:

$$\max_{0 \leq t \leq 10} |u| = 0.5175 * 5.93844 * 10^{-5} \text{ м/с}^2 = 3,07314 * 10^{-5} \text{ м/с}^2 \approx 3,134 * 10^{-6} g, \text{ где } g - \text{ускорение свободного падения на поверхности Земли.}$$

Заметим, что для разного начального положения космического аппарата, необходимо выбирать разные значения коэффициента управляющего воздействия  $k$ , т.е. для стабилизации движение КА, помещенного на 0,05 единиц расстояния дальше от Земли в окрестности точки либрации, необходимо приложить большее по значению управление (большее ускорение).

Приведем график зависимости изменения  $x_1$  при некоторых рассмотренных значений коэффициента  $k$ .

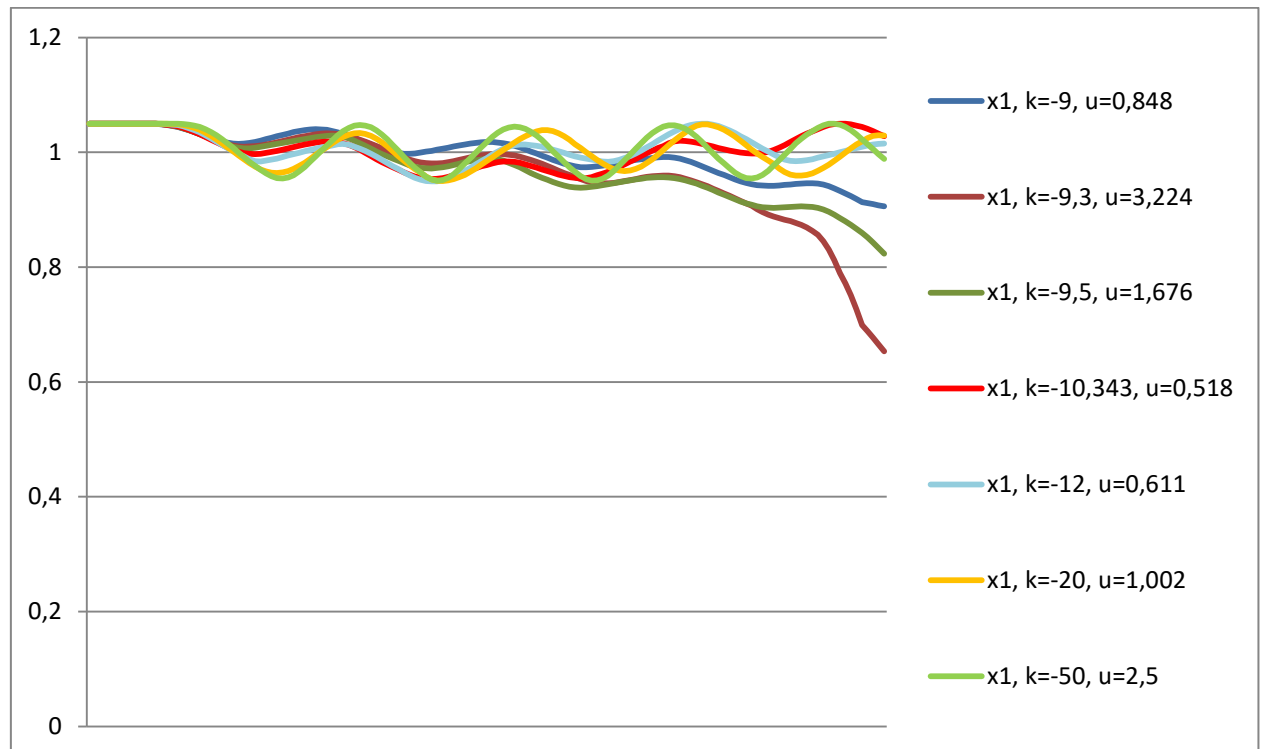


Рис. 12

На рис.12 красная кривая описывает оптимальную в смысле критерия

(3.2) траекторию управляемого движения. Эта траектория соответствует значению коэффициента  $k = -10.343$ , а максимальное по модулю управляющее воздействие на всей траектории  $\max_{0 \leq t \leq 10} |u| = 0.5175$ .

Отметим, что в Главе 2 были построены управляемые траектории движения КА для таких начальных положений с коэффициентом стабилизирующего управления  $k = -12$ . Заметим, что согласно полученным расчетам, эти управляющие воздействия не оказались оптимальными по критерию (3.2) ни в Случае 1, ни в Случае 2, хотя они также являются стабилизирующими. С возрастанием по модулю коэффициента  $k$ , отметим, что возрастает и значение модуля управляющего воздействия. Наблюдается следующее явление – как только значение коэффициента  $k$  доставляет стабилизирующий эффект управляющего воздействия, это управляющее воздействие и оказывается оптимальным в силу критерия (3.2). Вообще говоря, выбираемый коэффициент  $k$  определяет область управляемости [15]. В рассмотренных случаях, можно предположить, что оптимальное стабилизирующее управление будет находиться на границе области управляемости.

### **3.5 Построение оптимального коэффициента $k$ для случаев $x_1(0) = 0.9$ и $x_1(0) = 1.1$ .**

Попробуем подтвердить или опровергнуть данное предположение путем проведения еще одного эксперимента в окрестности точки либрации  $L_1$ , поместив КА на большее расстояние от нее по оси  $Ox_1$ .

В окрестности точки либрации  $L_1$ , аналогично рассмотренным ранее случаям, выберем начальное положение космического аппарата: по оси  $Ox_1$ , направленной вдоль прямой Земля-Солнце, поместим КА в окрестность точки либрации  $L_1$  с отклонением по прямой на 0,1 единиц расстояния в соответствии с заданными единицами расстояния системы, указанной в Главе 1 п.1.2. Таким образом, координаты точки либрации и начального

положения космического аппарата определяются следующим образом:

Точка  $L_1$ :  $x^* = (1, 0, 0)$ ,  $y^* = (0, 1, 0)$ .

3) Случай:  $x^3 = (0.9, 0, 0)$ ,  $y^3 = (0, 1, 0)$ .

4) Случай:  $x^4 = (1.1, 0, 0)$ ,  $y^4 = (0, 1, 0)$ .

Как и прежде, приведем расчеты в принятых единицах измерения расстояния: в начальный момент времени в рассматриваемой задаче моделирования управляемого движения космический аппарат помещен на прямой Земля-Солнце на 0,1 единиц расстояния ближе к Земле от положения точки либрации  $L_1$ , и находится на расстоянии  $\approx 1,346 * 10^6$  км от Земли в первом случае; и на 0,1 единицы расстояния дальше от Земли  $\approx 1,646 * 10^6$  км – во втором случае, а расстояние от космического аппарата до  $L_1$  одинаково в обоих случаях  $\approx 149,56 * 10^3$  км.

Проведем численный эксперимент для новых начальных положений КА, согласно алгоритму Главы 3 п.3.3. Посмотрим, можно ли стабилизировать движение КА рассмотренным выше управляющим регулятором, и при положительном результате вычислим оптимальное в силу критерия (3.2) управление.

### 3.5.1 Случай 3.

Начальное положение КА:  $x^2 = (0.9, 0, 0)$ ,  $y^2 = (0, 1, 0)$ .

Приведем некоторые результаты численного эксперимента для случая 3 начального положения КА в Таблице 3. По аналогии случая 1 и 2, укажем для каждого значения коэффициента  $k$  максимальное  $Max(x_1(t))$  и минимальное  $Min(x_1(t))$  значение координаты  $x_1$  на траектории и рассчитанное максимальное по модулю значение управляющего воздействия  $\max_{0 \leq t \leq 10} |u|$  на заданном временном промежутке.

Подробные результаты численного эксперимента указаны в Приложении 7.



$x_1(0) = 0,9$			
$k$	$Max(x_1(t))$	$Min(x_1(t))$	$\max_{0 \leq t \leq 10}  u $
-9	0,918178	-0,02489	9,224044
-9,3	1,224458	-0,02893	9,569068
-9,375	0,932491	-0,03035	9,659548
-9,4	0,933498	-0,03318	9,711932
-9,5	0,937491	-0,03037	9,788542
-9,6	1,072636	-0,02469	9,837041
-9,7	0,945883	-0,02905	9,981783
-9,9	1,062352	0,9	0,99
-10	1,073452	0,9	1
-11	1,084249	0,9	1,1
-12	1,093269	0,9	1,2
-20	1,096571	0,9	2
-50	1,097643	0,9	5

Табл.3

Заметим, что стабилизация орбитального движения КА, помещенного в указанную в случае 3 окрестность точки либрации  $L_1$ , возможна. Она достигается при значении коэффициента  $k$  больше или равно «-9,9». Рассматривая показатели минимального значения координаты  $x_1$  на траектории для  $k > -9.9$ , отметим, что они преодолевают нулевое значение, и, вообще говоря, отрицательные. А это означает, что движение КА на траектории не стабилизируемо, и не исключается возможность столкновения управляемого аппарата с Землей.

Также отметим, что в случаях стабилизирующего воздействия наименьшее значение управления достигается при значении коэффициента  $k = -9.9$ , и равно  $\max_{0 \leq t \leq 10} |u| = 0.99$  (в таблице отмечено красным цветом). В принятых единицах ускорения это значение равно  $\max_{0 \leq t \leq 10} |u| =$

$0.99 * 5.93844 * 10^{-5} \text{ м/с}^2 = 5,879 * 10^{-5} \text{ м/с}^2 \approx 5,995 * 10^{-6} g$ , где  $g$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Приведем график зависимости изменения  $x_1$  при некоторых рассмотренных значениях коэффициента  $k$ .

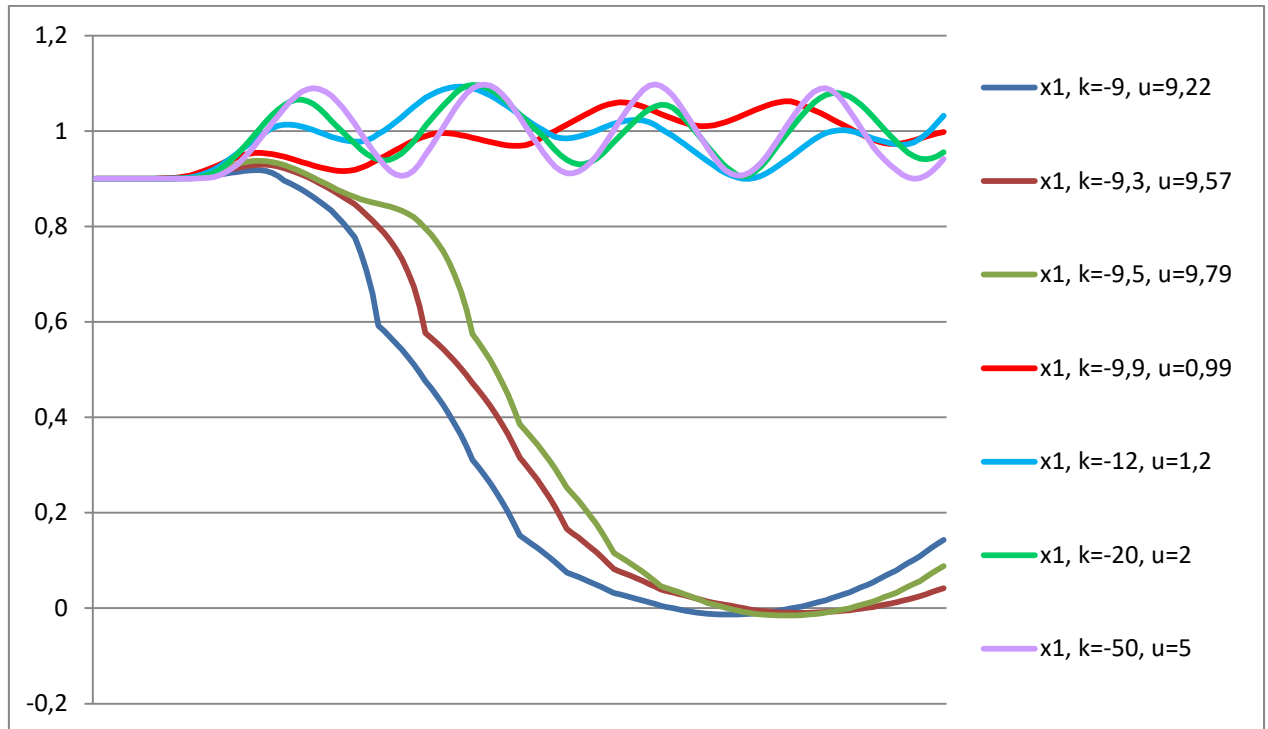


Рис.13

Красной кривой выделен график изменения координаты  $x_1$  при выборе оптимального управления с коэффициентом  $k = -9,9$ . На рис.13 видно, что в случаях, когда коэффициент больше «-9,9», движение КА не стабилизируемо. Также заметим, что в случае оптимального управления колебание значений координаты  $x_1$  меньше, чем в остальных рассмотренных случаях.

### 3.5.2 Случай 4.

Начальное положение КА:  $x^2 = (1.1, 0, 0)$ ,  $y^2 = (0, 1, 0)$ .

Проведем численный эксперимент по алгоритму, определим интересующие нас показатели координаты  $x_1$  для фиксированных значений коэффициента  $k$ , и рассчитаем максимальное по модулю управление для каждого случая. Результаты вычислений приведены в таблице 4.

С подробными результатами численного эксперимента можно ознакомиться в Приложении 7.

$x_1(0) = 1,1$			
$k$	$Max(x_1(t))$	$Min(x_1(t))$	$\max_{0 \leq t \leq 10}  u $
-9	1,1	-0,02985	9,268687
-9,3	1,1	-0,03166	9,594418
-9,4	1,1	-0,03434	9,722776
-9,5	1,1	-0,02829	9,76872
-9,6	1,39098	-0,0083	9,679653
-9,7	1,1	-0,03022	9,993124
-10	1,1	-0,02926	10,29259
-10,8	1,1	0,896699	1,115649
-11	1,1	0,895878	1,145341
-11,75	1,1	0,896642	1,214869
-12	1,100082	0,896567	1,241197
-20	1,1	0,898765	2,0247
-50	1,1	0,900218	5

Табл.4

По результатам численного эксперимента наблюдаем тенденцию, при которой до определенного значения коэффициента  $k$  управляющее воздействие не стабилизирует орбитальное движение КА в окрестности точки либрации  $L_1$ . В случае 4 – это значение «-10,8» (в таблице 4 отмечено красным цветом). Однако рассматривая значения  $k = -10,8$  и меньшие, получаем стабилизирующее управление, а максимальное значение  $k$  для такого семейства стабилизирующих управлений соответствует оптимальному управляющему воздействию в соответствии с критерием (3.2), и для данного случая равно  $\max_{0 \leq t \leq 10} |u| = 1,115649$  в единицах ускорения данной системы. Приведем значение требуемого управляющего ускорения:

$$\max_{0 \leq t \leq 10} |u| = 1,115649 * 5.93844 * 10^{-5} \text{ м/с}^2 = 6,6252 * 10^{-5} \text{ м/с}^2 \approx 6,7558 * 10^{-6} g.$$

График изменений координаты  $x_1$  для некоторых рассмотренных значений коэффициента  $k$  на рис.14

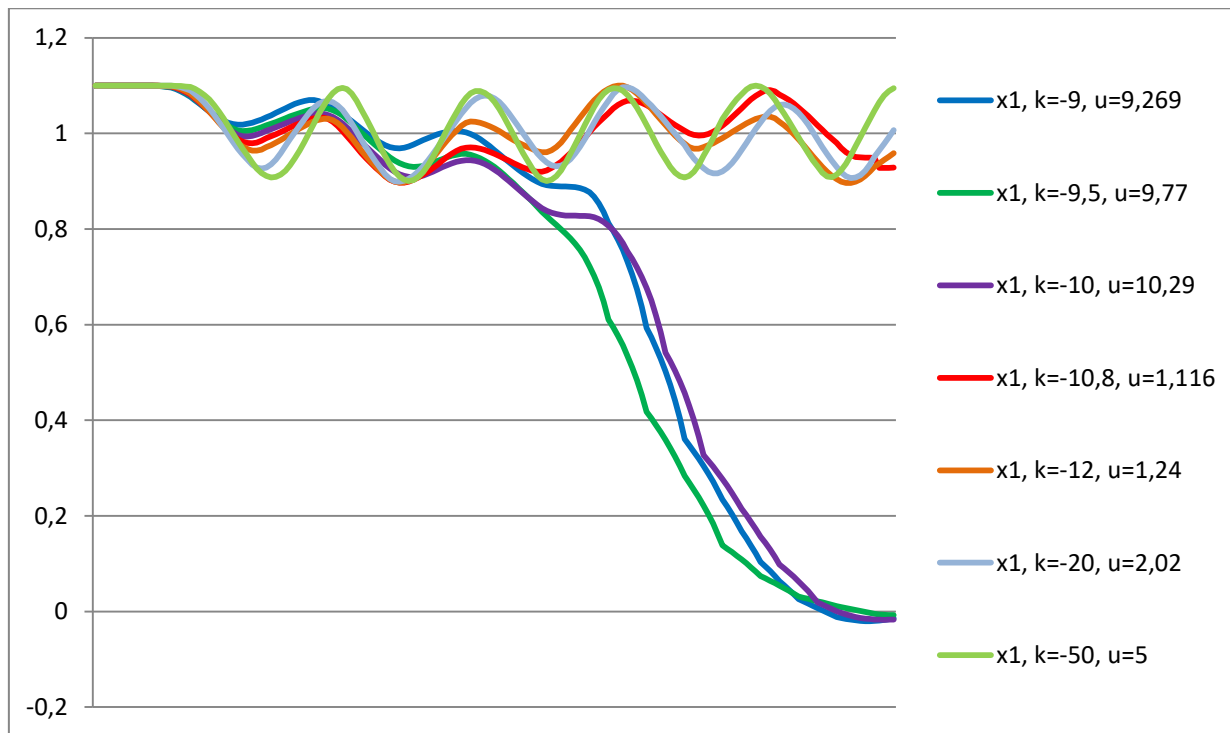


Рис.14

Красной кривой выделен график изменений  $x_1$  в случае оптимального управляющего воздействия. Можно привести аналогичные рассуждения, как и в прошлых трех рассмотренных случаях.

## Выводы

Согласно проведенным исследованиям, делаем вывод о возможности стабилизации движения КА в заданной окрестности точки либрации  $L_1$  на рассматриваемом временном промежутке порядка 1 года и 7 месяцев, с помощью достаточно малых управляющих воздействий. Для рассмотренных окрестностей точки либрации удалось подобрать оптимальное значение параметра  $k$  для семейства стабилизирующих управлений. Полученные значения управляющих ускорений в достаточной степени малы для практической их реализации с помощью двигателей малой тяги, а также для применения солнечного паруса.

Также необходимо отметить, что в ходе проводимого численного эксперимента наблюдалось следующее: при уменьшении значения неизвестного параметра  $k$  с определенного момента управляющее воздействие оказывало стабилизирующий эффект, а его максимальное значение соответствовало оптимальному управлению с точки зрения заданного критерия. Возникло предположение о том, что начальное положение космического аппарата находится на границе области управляемости, зависящей от значения параметра  $k$ . В ходе рассмотрения вариаций начального положения космического аппарата данное предположение подтвердилось. А значит, в качестве одного из направлений дальнейшего аналитического исследования это предположение может послужить в качестве рабочей гипотезы.

## Заключение

В ходе данной работы была рассмотрена траектория движения космического аппарата в окрестности точки либрации. С помощью уравнений круговой ограниченной задачи трех тел в хилловском приближении в относительных координатах была построена траектория неуправляемого движения КА с заданным начальным положением. Отмечено, что при отсутствии управления траектория КА значительно отклоняется от начального положения, и КА покидает окрестность точки либрации за рассматриваемый промежуток времени.

В качестве управляющего воздействия выбрано семейство стабилизирующих управлений с неизвестным параметром вида линейного регулятора, направленного по линии Земля-Солнце. Построены траектории управляемого орбитального движения с допустимым представлением управляющего воздействия. Отмечено, что КА незначительно отклоняется от начального положения и траектория движения за рассматриваемый промежуток времени лежит в некоторой окрестности точки либрации. Так как стабилизация движения КА возможна с помощью линейного регулятора, был поставлен вопрос о возможности оптимального представления управляющего воздействия.

Таким образом была поставлена задача определить возможное его оптимальное представление с целью уменьшения управляющего воздействия на КА, но при этом сохраняя его стабилизирующий эффект за рассматриваемый промежуток времени. В качестве критерия оценки оптимальности был введен функционал, минимизация которого позволяет найти необходимое управление.

Для рассмотренных случаев начального положения космического аппарата был проведен численный эксперимент согласно разработанному алгоритму. В ходе этого эксперимента были получены оптимальные управления для каждого случая начального положения КА, а также

произведен их расчет в привычных единицах измерения ускорений. Полученные значения управляющих воздействий в достаточной степени малы для реализации их с помощью двигателей малой тяги, а также с помощью солнечного давления при качественном определении его габаритов и характеристик.

Также отмечено, что согласно численному моделированию оптимального управления предполагается, что начальное положения космического аппарата находится на границе области управляемости. В подтверждение этой гипотезы численный эксперимент был проведен и для большей окрестности точки либрации. Полученные результаты это предположение подтвердили. Таким образом, для дальнейшего исследования это предположение может послужить в качестве рабочей гипотезы.

## Список литературы

1. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды в трех томах т.1. М.: Наука, 1971. 772 с.
2. Bruns H. Ueber die Integrale der Vielkoerper-Problems // Acta math. Bd. 11, 1887. P. 25-96
3. Уиттекер Э. Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 588 с.
4. Стюарт И. Величайшие математические задачи. Пер. с англ. – М.: Альпина нон-фикшн, 2015. 460 с.
5. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum. – Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., 1767, t. 11, p. 144-151
6. Lagrange J. L. Eassais sur le problem des trois corps. Paris, 1772.
7. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит. 1978. 312 с.
8. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 800 с.
9. Маркеев А.П. К задаче об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел. – Прикладная математика и механика. 1973, т.37, вып.4
10. Шмыров В.А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_1$  // Вестн. С.-Петербур. Ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2005. Вып. 2. С. 192-198
11. Шиманчук Д.В. Моделирование орбитального управляемого движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_1$  // Вестн. С.-Петербур. Ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2010. Вып. 3. С. 86-92
12. Шиманчук Д.В., Шмыров А.С. Построение траектории возвращения в окрестность коллинеарной точки либрации системы Солнце-



Земля // Вестн. С.-Петербур. Ун-та. Сер. 10, 2013. Вып. 2. С. 75-84

13. *Шмыров А.С.* Устойчивость в гамильтоновых системах. С.-Петербург.: 1995. 127 с.

14. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: 1975. 495 с.

15. *Shmyrov A., Shmyrov V.* On controllability region of orbital motion near L1 // Applied mathematical sciences, 2015. Vol. 9 (145–148). p. 7229–7236.

# Приложение

## Приложение 1.

Код программы для построения траектории неуправляемого движения в окрестности точки либрации для случая 1.

```
clear all
X0 = [0.95 0 0];
Y0 = [0 1 0];
t0=0; tf=10;
[t Z] = ode45('dots', t0, tf, [X0 Y0]);
%точка либрации
Z0 = [1 0 0 0 1 0];
%земля
Zz = [0 0 0 0 0 0];

%график
figure(1)
plot3(Z0(:, 1), Z0(:, 2), Z0(:, 3), 'r*')
hold on
plot3(Zz(:, 1), Zz(:, 2), Zz(:, 3), 'k*')
hold on
plot3(Z(:, 1), Z(:, 2), Z(:, 3))
hold on
grid on
<...>

function [ xfi ] = dots( t, z )
%UNTITLED Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
dots(1) = z(2)+z(4);
dots(2) = z(5)-z(1);
dots(3) = z(6);
dots(4) = -3*z(1)/norm(z(1:3))^3+2*z(1)+z(5);
dots(5) = -3*z(2)/norm(z(1:3))^3-z(2)-z(4);
dots(6) = -3*z(3)/norm(z(1:3))^3-z(3);
xfi = [dots(1); dots(2); dots(3); dots(4); dots(5); dots(6)];
end
```

## Приложение 2.

Код программы для построения траектории неуправляемого движения в окрестности точки либрации для случая 2.

```
clear all
X1 = [1.05 0 0];
Y1 = [0 1 0];
t0=0; tf=10;
[t1 Z1] = ode45('dots', t0, tf, [X1 Y1]);

%точка либрации
Z0 = [1 0 0 0 1 0];
%земля
Zz = [0 0 0 0 0 0];

%график
figure(1)
plot3(Z0(:, 1), Z0(:, 2), Z0(:, 3), 'r*')
hold on
plot3(Zz(:, 1), Zz(:, 2), Zz(:, 3), 'k*')
hold on
plot3(Z1(:, 1), Z1(:, 2), Z1(:, 3))
hold on
grid on
<...>

function [ xfi ] = dots( t, z )
%UNTITLED Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
dots(1) = z(2)+z(4);
dots(2) = z(5)-z(1);
dots(3) = z(6);
dots(4) = -3*z(1)/norm(z(1:3))^3+2*z(1)+z(5);
dots(5) = -3*z(2)/norm(z(1:3))^3-z(2)-z(4);
dots(6) = -3*z(3)/norm(z(1:3))^3-z(3);
xfi = [dots(1); dots(2); dots(3); dots(4); dots(5); dots(6)];
end
```

### Приложение 3.

Код программы для построения траектории управляемого движения в окрестности точки либрации для случая 1.

```
clear all
X0 = [0.95 0 0];
Y0 = [0 1 0];
t0=0; tf=10;
[t Z] = ode45('dots2', t0, tf, [X0 Y0]);

%точка либрации
Z0 = [1 0 0 0 1 0];
%земля
Zz = [0 0 0 0 0 0];

%график
figure(1)
plot3(Z0(:, 1), Z0(:, 2), Z0(:, 3), 'r*')
hold on
plot3(Zz(:, 1), Zz(:, 2), Zz(:, 3), 'k*')
hold on
plot3(Z(:, 1), Z(:, 2), Z(:, 3))
hold on
grid on
<...>

function [ xfi ] = dots2( t, z )
%UNTITLED Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
k = -12;
u = k*(z(1)-1);
dots(1) = z(2)+z(4);
dots(2) = z(5)-z(1);
dots(3) = z(6);
dots(4) = -3*z(1)/norm(z(1:3))^3+2*z(1)+z(5)+u;
dots(5) = -3*z(2)/norm(z(1:3))^3-z(2)-z(4);
dots(6) = -3*z(3)/norm(z(1:3))^3-z(3);
xfi = [dots(1); dots(2); dots(3); dots(4); dots(5); dots(6)];
end
```

## Приложение 4.

Код программы для построения траектории управляемого движения в окрестности точки либрации для случая 2.

```
clear all
X1 = [1.05 0 0];
Y1 = [0 1 0];
t0=0; tf=10;
[t1 Z1] = ode45('dots2', t0, tf, [X1 Y1]);

%точка либрации
Z0 = [1 0 0 0 1 0];
%земля
Zz = [0 0 0 0 0 0];

%график
figure(1)
plot3(Z0(:, 1), Z0(:, 2), Z0(:, 3), 'r*')
hold on
plot3(Zz(:, 1), Zz(:, 2), Zz(:, 3), 'k*')
hold on
plot3(Z1(:, 1), Z1(:, 2), Z1(:, 3))
hold on
grid on
<...>

function [ xfi ] = dots2( t, z )
%UNTITLED Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
k = -12;
u = k*(z(1)-1);
dots(1) = z(2)+z(4);
dots(2) = z(5)-z(1);
dots(3) = z(6);
dots(4) = -3*z(1)/norm(z(1:3))^3+2*z(1)+z(5)+u;
dots(5) = -3*z(2)/norm(z(1:3))^3-z(2)-z(4);
dots(6) = -3*z(3)/norm(z(1:3))^3-z(3);
xfi = [dots(1); dots(2); dots(3); dots(4); dots(5); dots(6)];
end
```

## Приложение 5.

Подробные вычисления значения координат  $x_1$  и  $u$  в зависимости от выбранного коэффициента  $k$  при начальном положении КА  $x_1(0) = 0.95$ .

[illegible]

Подробные вычисления значения координат  $x_1$  и  $u$  в зависимости от данного коэффициента  $k$  при начальном положении КА  $x_1(0) = 1.05$ .

55

## Приложение 7.

Подробные вычисления значения координат  $x_1$  и  $u$  в зависимости от выбранного коэффициента  $k$  при начальном положении КА  $x_1(0) = 0.9$ .

AW2		f <sub>к</sub>		-9,9																																	
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB
1	0.912481	0.612894	-0.38	0	0.9	0.918	1.418988	0.478242	-0.4	0	0.9	0.94	0.883488	0.711832	-0.5	0	0.9	0.937491	0.788242	-0.6	0	0.9	0.96	1.072836	0.817041	-0.7	0	0.9	0.97	0.842883	0.911781	0	0.9	0.99	1.062152	0.99	
2	-0.03025	0.612899		0.000202	0.9	0.918	-0.010258	-0.91144		0.000202	0.9	0.94	-0.00318	0.612123		0.000202	0.9	0.949999	0.967884		0.000202	0.9	0.96	-0.02469	-0.69731		0.000202	0.9	0.97	-0.02803	0.524815		0.000202	0.9	0.99		0.617282
3	0.962284	0.612894		0.001207	0.9	0.917999	1.427378	13.19068		0.001207	0.9	0.919999	0.966881	0.508808		0.001207	0.9	0.949999	0.967884		0.001207	0.9	0.959999	1.097128	10.51415		0.001207	0.9	0.969999	0.974933	0.458848		0.001207	0.9	0.989999		0.617282
4				0.000201	0.9	0.917997				0.000201	0.9	0.919997				0.000201	0.9	0.949997			0.000201	0.9	0.959997				0.000201	0.9	0.969997				0.000201	0.9	0.989997		
5				0.004521	0.900001	0.917997				0.004521	0.900001	0.919997				0.004521	0.900001	0.949998			0.004521	0.900001	0.959998				0.004521	0.900001	0.969998				0.004521	0.900001	0.989998		
6				0.007033	0.900003	0.917998				0.007033	0.900003	0.919998				0.007033	0.900004	0.949998			0.007033	0.900004	0.959998				0.007033	0.900004	0.969998				0.007033	0.900005	0.989998		
7				0.009545	0.900006	0.917943				0.009545	0.900006	0.919942				0.009545	0.900007	0.949997			0.009545	0.900007	0.959997				0.009545	0.900008	0.969997				0.009545	0.900009	0.989996		
8				0.012057	0.90001	0.917908				0.012057	0.90001	0.919967				0.012057	0.900011	0.949996			0.012057	0.900011	0.959996				0.012057	0.900012	0.969996				0.012057	0.900014	0.989996		
9				0.024616	0.900041	0.919812				0.024616	0.900041	0.919812				0.024616	0.900042	0.949879			0.024616	0.900042	0.959846				0.024616	0.900043	0.969811				0.024616	0.900046	0.989841		
10				0.037176	0.900093	0.91713				0.037176	0.900094	0.919113				0.037176	0.900101	0.949004			0.037176	0.900108	0.958886				0.037176	0.900115	0.968886				0.037176	0.900119	0.988726		
11				0.049715	0.900166	0.916844				0.049715	0.900168	0.918248				0.049715	0.900181	0.948284			0.049715	0.900188	0.958147				0.049715	0.900195	0.968008				0.049715	0.900203	0.987721		
12				0.062285	0.900236	0.915952				0.062285	0.900236	0.917751				0.062285	0.900251	0.947709			0.062285	0.900258	0.957895				0.062285	0.900265	0.967677				0.062285	0.900273	0.986429		
13				0.108353	0.900788	0.910612				0.108353	0.900803	0.912448				0.108353	0.900828	0.941538			0.108353	0.900853	0.950636				0.108353	0.900878	0.959735				0.108353	0.900903	0.977924		
14				0.154811	0.901288	0.912314				0.154811	0.901287	0.9124706				0.154811	0.901287	0.942367			0.154811	0.901287	0.942367				0.154811	0.901287	0.951614				0.154811	0.901287	0.960361		
15				0.201089	0.901848	0.913156				0.201089	0.901848	0.913156				0.201089	0.901848	0.942367			0.201089	0.901848	0.951614				0.201089	0.901848	0.960361				0.201089	0.901848	0.969058		
16				0.247327	0.902387	0.910888				0.247327	0.902387	0.910888				0.247327	0.902387	0.942367			0.247327	0.902387	0.951614				0.247327	0.902387	0.960361				0.247327	0.902387	0.969058		
17				0.293565	0.902926	0.911696				0.293565	0.902926	0.911696				0.293565	0.902926	0.942367			0.293565	0.902926	0.951614				0.293565	0.902926	0.960361				0.293565	0.902926	0.969058		
18				0.339803	0.903465	0.912504				0.339803	0.903465	0.912504				0.339803	0.903465	0.942367			0.339803	0.903465	0.951614				0.339803	0.903465	0.960361				0.339803	0.903465	0.969058		
19				0.386041	0.904004	0.913382				0.386041	0.904004	0.913382				0.386041	0.904004	0.942367			0.386041	0.904004	0.951614				0.386041	0.904004	0.960361				0.386041	0.904004	0.969058		
20				0.432279	0.904543	0.914260				0.432279	0.904543	0.914260				0.432279	0.904543	0.942367			0.432279	0.904543	0.951614				0.432279	0.904543	0.960361				0.432279	0.904543	0.969058		
21				0.478517	0.905082	0.915138				0.478517	0.905082	0.915138				0.478517	0.905082	0.942367			0.478517	0.905082	0.951614				0.478517	0.905082	0.960361				0.478517	0.905082	0.969058		
22				0.524755	0.905621	0.916016				0.524755	0.905621	0.916016				0.524755	0.905621	0.942367			0.524755	0.905621	0.951614				0.524755	0.905621	0.960361				0.524755	0.905621	0.969058		
23				0.570993	0.906160	0.916894				0.570993	0.906160	0.916894				0.570993	0.906160	0.942367			0.570993	0.906160	0.951614				0.570993	0.906160	0.960361				0.570993	0.906160	0.969058		
24				0.617231	0.906699	0.917772				0.617231	0.906699	0.917772				0.617231	0.906699	0.942367			0.617231	0.906699	0.951614				0.617231	0.906699	0.960361				0.617231	0.906699	0.969058		
25				0.663469	0.907238	0.918650				0.663469	0.907238	0.918650				0.663469	0.907238	0.942367			0.663469	0.907238	0.951614				0.663469	0.907238	0.960361				0.663469	0.907238	0.969058		
26				0.709707	0.907777	0.919501				0.709707	0.907777	0.919501				0.709707	0.907777	0.942367			0.709707	0.907777	0.951614				0.709707	0.907777	0.960361				0.709707	0.907777	0.969058		
27				0.755945	0.908316	0.920344				0.755945	0.908316	0.920344				0.755945	0.908316	0.942367			0.755945	0.908316	0.951614				0.755945	0.908316	0.960361				0.755945	0.908316	0.969058		
28				0.802183	0.908855	0.921187				0.802183	0.908855	0.921187				0.802183	0.908855	0.942367			0.802183	0.908855	0.951614				0.802183	0.908855	0.960361				0.802183	0.908855	0.969058		
29				0.848421	0.909394	0.922028				0.848421	0.909394	0.922028				0.848421	0.909394	0.942367			0.848421	0.909394	0.951614				0.848421	0.909394	0.960361				0.848421	0.909394	0.969058		
30				0.894659	0.909933	0.922869				0.894659	0.909933	0.922869				0.894659	0.909933	0.942367			0.894659	0.909933	0.951614				0.894659	0.909933	0.960361				0.894659	0.909933	0.969058		
31				0.940897	0.910472	0.923710				0.940897	0.910472	0.923710				0.940897	0.910472	0.942367			0.940897	0.910472	0.951614				0.940897	0.910472	0.960361				0.940897	0.910472	0.969058		
32				0.987135	0.910991	0.924551				0.987135	0.910991	0.924551				0.987135	0.910991	0.942367			0.987135	0.910991	0.951614				0.987135	0.910991	0.960361				0.987135	0.910991	0.969058		
33				1.033373	0.911510	0.925392				1.033373	0.911510	0.925392				1.033373	0.911510	0.942367			1.033373	0.911510	0.951614				1.033373	0.911510	0.960361				1.033373	0.911510	0.969058		
34				1.079611	0.912029	0.926233				1.079611	0.912029	0.926233				1.079611	0.912029	0.942367			1.079611	0.912029	0.951614				1.079611	0.912029	0.960361				1.079611	0.912029	0.969058		
35				1.125849	0.912548	0.927074				1.125849	0.912548	0.927074				1.125849	0.912548	0.942367			1.125849	0.912548	0.951614				1.125849	0.912548	0.960361				1.125849	0.912548	0.969058		
36				1.172087	0.913067	0.927915				1.172087	0.913067	0.927915				1.172087	0.913067	0.942367			1.172087	0.913067	0.951614				1.172087	0.913067	0.960361				1.172087	0.913067	0.969058		
37				1.218325	0.913586	0.928756				1.218325	0.913586	0.928756				1.218325	0.9135																				



## Приложение 8.

Подробные вычисления значения координат  $x_1$  и  $u$  в зависимости от выбранного коэффициента  $k$  при начальном положении КА  $x_1(0) = 1.1$ .

BC2		$f_k$		-10,8			
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-10,8	
k		BC2		$f_k$		-1	